微分幾何の観点からの TextilePlot の理解

田中潮 大阪府立大学・理学系研究科　　清智也 東京大学・情報理工

統計関連学会連合大会，金沢大学，9.7, 2016

Background and Motivation

- TextilePlot は，Kumasaka and Shibata (2008) により提案された高次元データ可視化のための一手法:
  - 高次元データに対する的確な認識をサポートするひとつの data visualization.
- TextilePlot はデータ行列を適当に変換し 平行座標プロット を描く:
  - 平行座標プロットは多変量データを可視化するための有用な統計グラフである.
- 本研究では，高次元データに対する画期的な視覚表現方法である TextilePlot 自体に焦点を当てる:
  - TextilePlot はどのような形状を成しているか? その構造は?, i.e., TextilePlot 自体の可視化.
  - TextilePlot を数学的に定式化すると視覚的に捉えやすい．この定式化を TextileSet とよぶ.
  - TextileSet を 幾何学 の観点から考察する: 本研究では，特に，微分幾何学 とそれに加えて 解析幾何学 に基づく.

Background and Motivation

- TextilePlot は，Kumasaka and Shibata (2008) により提案された高次元データ可視化のための一手法:
  - 高次元データに対する的確な認識をサポートするひとつの data visualization.
- TextilePlot はデータ行列を適当に変換し 平行座標プロット を描く:
  - 平行座標プロットは多変量データを可視化するための有用な統計グラフである.
- 本研究では，高次元データに対する画期的な視覚表現方法である TextilePlot 自体に焦点を当てる:
  - TextilePlot はどのような形状を成しているか? その構造は?, i.e., TextilePlot 自体の可視化.
  - TextilePlot を数学的に定式化すると視覚的に捉えやすい．この定式化を TextileSet とよぶ.
  - TextileSet を 幾何学 の観点から考察する: 本研究では，特に，微分幾何学 とそれに加えて 解析幾何学 に基づく.

Background and Motivation

- TextilePlot は，Kumasaka and Shibata (2008) により提案された高次元データ可視化のための一手法:
  - 高次元データに対する的確な認識をサポートするひとつの data visualization.
- TextilePlot はデータ行列を適当に変換し 平行座標プロット を描く:
  - 平行座標プロットは多変量データを可視化するための有用な統計グラフである.
- 本研究では，高次元データに対する画期的な視覚表現方法である TextilePlot 自体に焦点を当てる:
  - TextilePlot はどのような形状を成しているか? その構造は?, i.e., TextilePlot 自体の可視化.
  - TextilePlot を数学的に定式化すると視覚的に捉えやすい．この定式化を TextileSet とよぶ.
  - TextileSet を 幾何学 の観点から考察する: 本研究では，特に，微分幾何学 とそれに加えて 解析幾何学 に基づく.

Background and Motivation

- TextilePlot は，Kumasaka and Shibata (2008) により提案された高次元データ可視化のための一手法:
  - 高次元データに対する的確な認識をサポートするひとつの data visualization.
- TextilePlot はデータ行列を適当に変換し 平行座標プロット を描く:
  - 平行座標プロットは多変量データを可視化するための有用な統計グラフである.
- 本研究では，高次元データに対する画期的な視覚表現方法である TextilePlot 自体に焦点を当てる:
  - TextilePlot はどのような形状を成しているか? その構造は?, i.e., TextilePlot 自体の可視化.
  - TextilePlot を数学的に定式化すると視覚的に捉えやすい．この定式化を TextileSet とよぶ.
  - TextileSet を 幾何学 の観点から考察する: 本研究では，特に，微分幾何学 とそれに加えて 解析幾何学 に基づく.

Background and Motivation

- TextilePlot は，Kumasaka and Shibata (2008) により提案された高次元データ可視化のための一手法:
  - 高次元データに対する的確な認識をサポートするひとつの data visualization.
- TextilePlot はデータ行列を適当に変換し 平行座標プロット を描く:
  - 平行座標プロットは多変量データを可視化するための有用な統計グラフである.
- 本研究では，高次元データに対する画期的な視覚表現方法である TextilePlot 自体に焦点を当てる:
  - TextilePlot はどのような形状を成しているか? その構造は?, i.e., TextilePlot 自体の可視化.
  - TextilePlot を数学的に定式化すると視覚的に捉えやすい．この定式化を TextileSet とよぶ.
  - TextileSet を 幾何学 の観点から考察する: 本研究では，特に，微分幾何学 とそれに加えて 解析幾何学 に基づく.

Background and Motivation

- TextilePlot は，Kumasaka and Shibata (2008) により提案された高次元データ可視化のための一手法:
  - 高次元データに対する的確な認識をサポートするひとつの data visualization.
- TextilePlot はデータ行列を適当に変換し 平行座標プロット を描く:
  - 平行座標プロットは多変量データを可視化するための有用な統計グラフである.
- 本研究では，高次元データに対する画期的な視覚表現方法である TextilePlot 自体に焦点を当てる:
  - TextilePlot はどのような形状を成しているか? その構造は?, i.e., TextilePlot 自体の可視化.
  - TextilePlot を数学的に定式化すると視覚的に捉えやすい．この定式化を TextileSet とよぶ.
  - TextileSet を 幾何学 の観点から考察する: 本研究では，特に，微分幾何学 とそれに加えて 解析幾何学 に基づく.

Background and Motivation

- TextilePlot は，Kumasaka and Shibata (2008) により提案された高次元データ可視化のための一手法:
    - 高次元データに対する的確な認識をサポートするひとつの data visualization.
- TextilePlot はデータ行列を適当に変換し 平行座標プロット を描く:
    - 平行座標プロットは多変量データを可視化するための有用な統計グラフである.
- 本研究では，高次元データに対する画期的な視覚表現方法である TextilePlot 自体に焦点を当てる:
    - TextilePlot はどのような形状を成しているか? その構造は?, i.e., TextilePlot 自体の可視化.
    - TextilePlot を数学的に定式化すると視覚的に捉えやすい．この定式化を TextileSet とよぶ.
    - TextileSet を 幾何学 の観点から考察する: 本研究では，特に，微分幾何学 とそれに加えて 解析幾何学 に基づく.

TextilePlot

Definition (TextilePlot (Kumasaka and Shibata, 2008))

$\boldsymbol{X}$ を p 変量に関する n 個体の観測からなるデータ行列とする: $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p) \in \mathbb{R}^{n \times p}$. なお，量的データかつ欠損値はないものとする．このとき各 $\boldsymbol{x}_j$ の位置と尺度に関する変換としてつぎを考える:

$$\boldsymbol{y}_j := a_j \mathbf{1}_n + b_j \boldsymbol{x}_j, \quad j = 1, \ldots, p, \ \mathbf{1}_n = {}^t(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}).$$

各 (a_j, b_j) をつぎのように選ぶ:

Remark

$\boldsymbol{X}$ の標本和は 0，標本二乗和は 1 と仮定しても一般性は失われない．

TextilePlot

Definition (TextilePlot (Kumasaka and Shibata, 2008))

$\boldsymbol{X}$ を p 変量に関する n 個体の観測からなるデータ行列とする: $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p) \in \mathbb{R}^{n \times p}$. なお，量的データかつ欠損値はないものとする．このとき各 $\boldsymbol{x}_j$ の位置と尺度に関する変換としてつぎを考える:

$$\boldsymbol{y}_j := a_j \boldsymbol{1}_n + b_j \boldsymbol{x}_j, \quad j = 1, \ldots, p, \ \boldsymbol{1}_n = {}^t(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}).$$

各 (a_j, b_j) をつぎのように選ぶ:

Remark

$\boldsymbol{X}$ の標本和は 0，標本二乗和は 1 と仮定しても一般性は失われない．

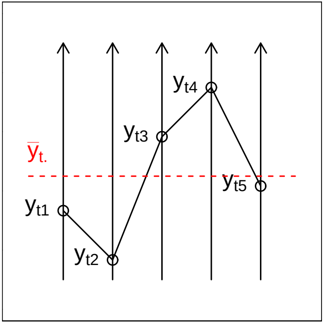
TextilePlot

- $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, \ldots, a_p)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, \ldots, b_p)$ は，つぎの二乗誤差の和に対する最小化問題の解とする:

$$\min_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} \sum_{t=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (y_{tj} - \bar{y}_{t\cdot})^2$$

$$\text{subject to } \boldsymbol{y}_j = a_j \mathbf{1}_n + b_j \boldsymbol{x}_j,$$

$$\sum_{t=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (y_{tj} - \bar{y}_{\cdot j})^2 = 1. \qquad (1)$$



- Intuition: なるべく平行に
- Solution: $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{X}$ の共分散行列の最大固有値に対応する単位固有ベクトル by Remark, (1).

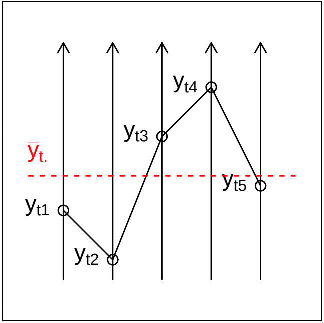
TextilePlot

- $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, \ldots, a_p)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, \ldots, b_p)$ は，つぎの二乗誤差の和に対する最小化問題の解とする:

$$\min_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} \sum_{t=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (y_{tj} - \bar{y}_{t\cdot})^2$$

$$\text{subject to } \boldsymbol{y}_j = a_j \mathbf{1}_n + b_j \boldsymbol{x}_j,$$

$$\sum_{t=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (y_{tj} - \bar{y}_{\cdot j})^2 = 1. \qquad (1)$$



- Intuition: なるべく平行に

- Solution: $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{X}$ の共分散行列の最大固有値に対応する単位固有ベクトル by Remark, (1).

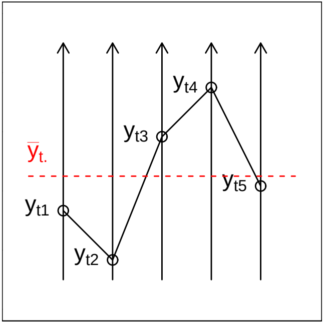
TextilePlot

- $\boldsymbol{a} = {}^t(a_1, \ldots, a_p)$, $\boldsymbol{b} = {}^t(b_1, \ldots, b_p)$ は，つぎの二乗誤差の和に対する最小化問題の解とする:

$$\min_{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}} \sum_{t=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (y_{tj} - \bar{y}_{t\cdot})^2$$

$$\text{subject to } \boldsymbol{y}_j = a_j \mathbf{1}_n + b_j \boldsymbol{x}_j,$$

$$\sum_{t=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} (y_{tj} - \bar{y}_{\cdot j})^2 = 1. \qquad (1)$$



- Intuition: なるべく平行に

- Solution: $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$,
  $\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{X}$ の共分散行列の最大固有値に対応する単位固有ベクトル
  by Remark, (1).

Mathematical statement for TextilePlot

- TextilePlot は $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p)$ を $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_p)$ へ変換する.
- $\boldsymbol{Y}$ はつぎを満たす:

$$\exists \lambda \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, p\} \quad \sum_{j=1}^{p} {}^t\boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_j = \lambda \|\boldsymbol{y}_i\|^2,$$

$$\sum_{j=1}^{p} \|\boldsymbol{y}_j\|^2 = 1.$$

- 本研究では，TextilePlot の構造を考察するために TextileSet に焦点を当てる.

Mathematical statement for TextilePlot

- TextilePlot は $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p)$ を $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_p)$ へ変換する.
- $\boldsymbol{Y}$ はつぎを満たす:

$$\exists \lambda \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, p\} \quad \sum_{j=1}^{p} {}^t\boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_j = \lambda \|\boldsymbol{y}_i\|^2,$$

$$\sum_{j=1}^{p} \|\boldsymbol{y}_j\|^2 = 1.$$

- 本研究では, TextilePlot の構造を考察するために TextileSet に焦点を当てる.

Mathematical statement for TextilePlot

- TextilePlot は $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_p)$ を $\boldsymbol{Y} = (\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_p)$ へ変換する.
- $\boldsymbol{Y}$ はつぎを満たす:

$$\exists\lambda \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, p\} \quad \sum_{j=1}^{p} {}^t\boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_j = \lambda \|\boldsymbol{y}_i\|^2,$$

$$\sum_{j=1}^{p} \|\boldsymbol{y}_j\|^2 = 1.$$

- 本研究では，TextilePlot の構造を考察するために TextileSet に焦点を当てる.

TextileSet

Definition (By Sei (Nov., 2013))

TextileSet $T_{n,p}$ をつぎで定義する:

$$T_{n,p} := \{ \boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{n \times p} \mid \exists \lambda \geq 0,\ \forall i \in \{1, \dots, p\},$$
$$\sum_{j=1}^{p} {}^t\boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_j = \lambda \|\boldsymbol{y}_i\|^2, \sum_{j=1}^{p} \|\boldsymbol{y}_j\|^2 = 1 \}.$$

Theorem (Sei and T. (2015))

TextileSet は，データ行列が *full rank* ならば，２つの可微分多様体の和で与えられる．

TextileSet

Definition (By Sei (Nov., 2013))

TextileSet $T_{n,p}$ をつぎで定義する:

$$T_{n,p} := \{\, \boldsymbol{Y} \in \mathbb{R}^{n\times p} \mid \exists\lambda \geq 0,\ \forall i \in \{1,\ldots,p\},\ \sum_{j=1}^{p} {}^t\boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_j = \lambda \|\boldsymbol{y}_i\|^2, \sum_{j=1}^{p} \|\boldsymbol{y}_j\|^2 = 1 \,\}.$$

Theorem (Sei and T. (2015))

TextileSet は，データ行列が *full rank* ならば，２つの可微分多様体の和で与えられる．

Characterization of TextileSet: Differential Geometrical Approach

Lemma (Classification)

$\lambda \geq 0$ を任意に固定する． $f_\lambda : \mathbb{R}^{n\times p} \to \mathbb{R}^{p+1}$ をつぎで定義する:

$$f_\lambda(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_p) := \left(\sum_{j=1}^{p} {}^t\boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_j - \lambda \|\boldsymbol{y}_i\|^2, \sum_{j=1}^{p} \|\boldsymbol{y}_j\|^2 - 1 \right), i = 1, \ldots, p.$$

$\{ f_\lambda{}^{-1}(\boldsymbol{O}) \mid \lambda \geq 0 \}$ は *TextileSet* の *classification* である, *i.e.*,

$$T_{n,p} = \bigsqcup_{\lambda \geq 0} f_\lambda{}^{-1}(\boldsymbol{O}) = \bigsqcup_{0 \leq \lambda \leq n} f_\lambda{}^{-1}(\boldsymbol{O}). \tag{2}$$

Remark

$\lambda \leq n$ *in* (2) は *Cauchy-Schwarz ineq.* から従う.

Characterization of TextileSet: Differential Geometrical Approach

Lemma (Classification)

$\lambda \geq 0$ を任意に固定する． $f_\lambda : \mathbb{R}^{n\times p} \to \mathbb{R}^{p+1}$ をつぎで定義する:

$$f_\lambda(\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_p) := \left(\sum_{j=1}^{p} {}^t\boldsymbol{y}_i \boldsymbol{y}_j - \lambda \|\boldsymbol{y}_i\|^2, \sum_{j=1}^{p} \|\boldsymbol{y}_j\|^2 - 1 \right), i = 1, \ldots, p.$$

$\{ f_\lambda{}^{-1}(\boldsymbol{O}) \mid \lambda \geq 0 \}$ は *TextileSet* の *classification* である, *i.e.,*

$$T_{n,p} = \bigsqcup_{\lambda \geq 0} f_\lambda{}^{-1}(\boldsymbol{O}) = \bigsqcup_{0 \leq \lambda \leq n} f_\lambda{}^{-1}(\boldsymbol{O}). \tag{2}$$

Remark

$\lambda \leq n$ *in* (2) は *Cauchy-Schwarz ineq.* から従う.

Characterization of TextileSet: Differential Geometrical Approach

TextileSet よりそれの classification が扱い易い.

Theorem (Regular submanifold)

正則条件

$$0 < \lambda \, (\leq n),$$
$$y_{11}y_{jj} - y_{1j}y_{j1} \neq 0, \quad j = 2, \ldots, p,$$
$$\exists \ell \in \{2, \ldots, p\}; \sum_{j=2}^{p} y_{ij} + y_{i\ell}(1 - 2\lambda) \neq 0, \quad i = 1, \ldots, n$$

を仮定する．このとき，$f_\lambda{}^{-1}(\boldsymbol{O})$ は $\mathbb{R}^{n \times p}$ の余次元 $p + 1$ の正則部分多様体である．

Characterization of TextileSet: Differential Geometrical Approach

以下，正則条件を仮定する．

Theorem

特に，$n = p = 2$ のとき，$f_\lambda{}^{-1}(\boldsymbol{O})$ は 1 次元連結コンパクト可微分多様体である．したがって単位円周，すなわち $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と微分同型である．

Lemma (classification) よりつぎを得る:

Theorem (Main result)

TextileSet $T_{n,p}$ は $np - (p+1)$ 次元コンパクト可微分多様体である，ここに，$T_{n,p}$ の微分構造は，$\mathbb{R}^{n\times p}$ の余次元 $p+1$ の正則部分多様体 $f_\lambda{}^{-1}(\boldsymbol{O})$ の開集合の直和から決まる．

Characterization of TextileSet: Differential Geometrical Approach

以下，正則条件を仮定する．

Theorem

特に，$n = p = 2$ のとき，${f_\lambda}^{-1}(\boldsymbol{O})$ は 1 次元連結コンパクト可微分多様体である．したがって単位円周，すなわち $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と微分同型である．

Lemma (classification) よりつぎを得る:

Theorem (Main result)

TextileSet $T_{n,p}$ は $np - (p+1)$ 次元コンパクト可微分多様体である，ここに，$T_{n,p}$ の微分構造は，$\mathbb{R}^{n \times p}$ の余次元 $p+1$ の正則部分多様体 ${f_\lambda}^{-1}(\boldsymbol{O})$ の開集合の直和から決まる．

Characterization of TextileSet: Analytic Geometrical Approach

Claim

- つぎの問題意識として TextileSet の接空間を考察することが自然である.
  - TextileSet は古典群より複雑であり，それの接空間は目下不透明である.
  - TextileSet の接空間を明示的に記述できるならば，TextileSet の部分多様体論は進展し，それの断面曲率や測地線を考察することができる.
- ここでは TextileSet は行列の集合 であったことに注意し，視点を変えてこれを 代数的な観点 から考察する:
  - 解析幾何学 の援用.
  - 解析幾何学は楕円や双曲面等の幾何的対象を代数的に記述する.

Characterization of TextileSet: Analytic Geometrical Approach

Claim

- つぎの問題意識として TextileSet の接空間を考察することが自然である.
    - TextileSet は古典群より複雑であり，それの接空間は目下不透明である.
    - TextileSet の接空間を明示的に記述できるならば，TextileSet の部分多様体論は進展し，それの断面曲率や測地線を考察することができる.
- ここでは TextileSet は行列の集合 であったことに注意し，視点を変えてこれを 代数的な観点 から考察する:
    - 解析幾何学 の援用.
    - 解析幾何学は楕円や双曲面等の幾何的対象を代数的に記述する.

Characterization of TextileSet: Analytic Geometrical Approach

Claim

- つぎの問題意識として TextileSet の接空間を考察することが自然である.
  - TextileSet は古典群より複雑であり，それの接空間は目下不透明である.
  - TextileSet の接空間を明示的に記述できるならば，TextileSet の部分多様体論は進展し，それの断面曲率や測地線を考察することができる.
- ここでは TextileSet は行列の集合 であったことに注意し，視点を変えてこれを 代数的な観点 から考察する:
  - 解析幾何学 の援用.
  - 解析幾何学は楕円や双曲面等の幾何的対象を代数的に記述する.

Characterization of TextileSet: Analytic Geometrical Approach

Claim

- つぎの問題意識として TextileSet の接空間を考察することが自然である.
  - TextileSet は古典群より複雑であり，それの接空間は目下不透明である.
  - TextileSet の接空間を明示的に記述できるならば，TextileSet の部分多様体論は進展し，それの断面曲率や測地線を考察することができる.
- ここでは <u>TextileSet は行列の集合</u> であったことに注意し，視点を変えてこれを <u>代数的な観点</u> から考察する:
  - 解析幾何学 の援用.
  - 解析幾何学は楕円や双曲面等の幾何的対象を代数的に記述する.

Characterization of TextileSet: Analytic Geometrical Approach

Claim

- つぎの問題意識として TextileSet の接空間を考察することが自然である.
    - TextileSet は古典群より複雑であり，それの接空間は目下不透明である.
    - TextileSet の接空間を明示的に記述できるならば，TextileSet の部分多様体論は進展し，それの断面曲率や測地線を考察することができる.
- ここでは TextileSet は行列の集合 であったことに注意し，視点を変えてこれを 代数的な観点 から考察する:
    - 解析幾何学 の援用.
    - 解析幾何学は楕円や双曲面等の幾何的対象を代数的に記述する.

Characterization of TextileSet: Analytic Geometrical Approach

Claim

- つぎの問題意識として TextileSet の接空間を考察することが自然である.
  - TextileSet は古典群より複雑であり，それの接空間は目下不透明である.
  - TextileSet の接空間を明示的に記述できるならば，TextileSet の部分多様体論は進展し，それの断面曲率や測地線を考察することができる.
- ここでは TextileSet は行列の集合 であったことに注意し，視点を変えてこれを 代数的な観点 から考察する:
  - 解析幾何学 の援用.
  - 解析幾何学は楕円や双曲面等の幾何的対象を代数的に記述する.

Characterization of TextileSet: Analytic Geometrical Approach

以後，$n = p \geq 2$ とする．TextileSet を代数的に考察するため，$\boldsymbol{Y}$ の各成分 y_{ij}, $i, j \in \{1, \dots, n\}$ に対して改めて番号付けを行う:

$$y_{11} = y_1, \dots, y_{1n} = y_n, \dots, y_{n1} = y_{n^2-(n-1)}, \dots, y_{nn} = y_{n^2}.$$

Lemma

$\lambda \geq 0$ を任意に固定する．$F_\lambda : \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ をつぎで定義する:

$$\begin{aligned} F_\lambda(y_1, \dots, y_{n^2}) := \{&(y_1(y_2 + \dots + y_n) + \dots + y_n(y_1 + \dots + y_{n-1})\} + \\ &\dots + \{y_{n^2-(n-1)}(y_{n^2-(n-2)} + \dots + y_{n^2}) + \\ &\dots + y_{n^2}(y_{n^2-(n-1)} + \dots + y_{n^2-1})\} - (\lambda - 1). \end{aligned}$$

つぎが成り立つ:

$$T_{n,n} \subset F_\lambda{}^{-1}(0).$$

Characterization of TextileSet: Analytic Geometrical Approach

$$F_\lambda(y_1,\ldots,y_{n^2}) = (y_1,\ldots,y_{n^2})\,A\,{}^t(y_1,\ldots,y_{n^2}) - (\lambda-1),$$

$$A := \underbrace{\left.\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \ldots & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}.\right\}}_{n^2 \text{ columns}} n^2 \text{ rows}$$

Characterization of TextileSet: Analytic Geometrical Approach

Lemma

$\det A = ((-1)^{n-1}(n-1))^n (> 0)$ より，2次曲面 $F_\lambda = 0$ は有心曲面であることが従う．また，A の固有値は $n-1$, -1 で与えられ，重複度はそれぞれ n, $n(n-1)$ である．

Theorem

F_λ の標準形は適当な座標変換を施すことによりつぎで与えられる:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\lambda-1}{z_1}^2 - \cdots - \frac{1}{\lambda-1}{z_{n(n-1)}}^2 \\
&\quad + \frac{n-1}{\lambda-1}{z_{n(n-1)+1}}^2 + \cdots + \frac{n-1}{\lambda-1}{z_{n^2}}^2 = 1, \quad 1 < \lambda (\leq n),
\end{aligned}
$$

$$
-{z_1}^2 - \cdots - {z_{n(n-1)}}^2 + (n-1){z_{n(n-1)+1}}^2 + \cdots + (n-1){z_{n^2}}^2 = 0,\ \lambda = 1.
$$

Characterization of TextileSet: Analytic Geometrical Approach

Lemma

$\det A = ((-1)^{n-1}(n-1))^n (> 0)$ より，2 次曲面 $F_\lambda = 0$ は有心曲面であることが従う．また，A の固有値は $n-1$, -1 で与えられ，重複度はそれぞれ n, $n(n-1)$ である．

Theorem

F_λ の標準形は適当な座標変換を施すことによりつぎで与えられる:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\lambda-1}{z_1}^2 - \cdots - \frac{1}{\lambda-1}{z_{n(n-1)}}^2 \\
&\quad + \frac{n-1}{\lambda-1}{z_{n(n-1)+1}}^2 + \cdots + \frac{n-1}{\lambda-1}{z_{n^2}}^2 = 1, \quad 1 < \lambda (\leq n),
\end{aligned}
$$

$$
-{z_1}^2 - \cdots - {z_{n(n-1)}}^2 + (n-1){z_{n(n-1)+1}}^2 + \cdots + (n-1){z_{n^2}}^2 = 0, \ \lambda = 1.
$$

Summary

- TextilePlot の構造を調べるために，これを TextileSet $T_{n,p}$ として数学的に定式化した.
- 「微分幾何の観点からの TextilePlot の理解」としてつぎを得た:
  - 正則条件のもと，TextileSet $T_{n,p}$ は $np-(p+1)$ 次元コンパクト可微分多様体となる.
  - 今後の課題のひとつは $T_{n,p}$ の接空間を記述することであり，これにより「微分幾何の観点からの TextilePlot の理解」を深めることができる.
- TextileSet に対して解析幾何学 (幾何学に関する問題を座標によって数の問題に帰着して代数的に処理する幾何学) を展開し，つぎを得た:
  - TextileSet を含む 2 次曲面を与えた.
  - これは TextileSet の概形を知る際の手掛かりとなる.

Summary

- TextilePlot の構造を調べるために，これを TextileSet $T_{n,p}$ として数学的に定式化した.
- 「微分幾何の観点からの TextilePlot の理解」としてつぎを得た:
  - 正則条件のもと，TextileSet $T_{n,p}$ は $np-(p+1)$ 次元コンパクト可微分多様体となる.
  - 今後の課題のひとつは $T_{n,p}$ の接空間を記述することであり，これにより「微分幾何の観点からの TextilePlot の理解」を深めることができる.
- TextileSet に対して解析幾何学 (幾何学に関する問題を座標によって数の問題に帰着して代数的に処理する幾何学) を展開し，つぎを得た:
  - TextileSet を含む 2 次曲面を与えた.
  - これは TextileSet の概形を知る際の手掛かりとなる.

Summary

- TextilePlot の構造を調べるために，これを TextileSet $T_{n,p}$ として数学的に定式化した．
- 「微分幾何の観点からの TextilePlot の理解」としてつぎを得た:
    - 正則条件のもと，TextileSet $T_{n,p}$ は $np-(p+1)$ 次元コンパクト可微分多様体となる．
    - 今後の課題のひとつは $T_{n,p}$ の接空間を記述することであり，これにより「微分幾何の観点からの TextilePlot の理解」を深めることができる．
- TextileSet に対して解析幾何学 (幾何学に関する問題を座標によって数の問題に帰着して代数的に処理する幾何学) を展開し，つぎを得た:
    - TextileSet を含む 2 次曲面を与えた．
    - これは TextileSet の概形を知る際の手掛かりとなる．

Summary

- TextilePlot の構造を調べるために，これを TextileSet $T_{n,p}$ として数学的に定式化した.
- 「微分幾何の観点からの TextilePlot の理解」としてつぎを得た:
    - 正則条件のもと，TextileSet $T_{n,p}$ は $np - (p+1)$ 次元コンパクト可微分多様体となる.
    - 今後の課題のひとつは $T_{n,p}$ の接空間を記述することであり，これにより「微分幾何の観点からの TextilePlot の理解」を深めることができる.
- TextileSet に対して解析幾何学 (幾何学に関する問題を座標によって数の問題に帰着して代数的に処理する幾何学) を展開し，つぎを得た:
    - TextileSet を含む 2 次曲面を与えた.
    - これは TextileSet の概形を知る際の手掛かりとなる.

Summary

- TextilePlot の構造を調べるために，これを TextileSet $T_{n,p}$ として数学的に定式化した．
- 「微分幾何の観点からの TextilePlot の理解」としてつぎを得た:
  - 正則条件のもと，TextileSet $T_{n,p}$ は $np-(p+1)$ 次元コンパクト可微分多様体となる．
  - 今後の課題のひとつは $T_{n,p}$ の接空間を記述することであり，これにより「微分幾何の観点からの TextilePlot の理解」を深めることができる．
- TextileSet に対して解析幾何学 (幾何学に関する問題を座標によって数の問題に帰着して代数的に処理する幾何学) を展開し，つぎを得た:
  - TextileSet を含む 2 次曲面を与えた．
  - これは TextileSet の概形を知る際の手掛かりとなる．

Summary

- TextilePlot の構造を調べるために，これを TextileSet $T_{n,p}$ として数学的に定式化した．
- 「微分幾何の観点からの TextilePlot の理解」としてつぎを得た:
  - 正則条件のもと，TextileSet $T_{n,p}$ は $np-(p+1)$ 次元コンパクト可微分多様体となる．
  - 今後の課題のひとつは $T_{n,p}$ の接空間を記述することであり，これにより「微分幾何の観点からの TextilePlot の理解」を深めることができる．
- TextileSet に対して解析幾何学 (幾何学に関する問題を座標によって数の問題に帰着して代数的に処理する幾何学) を展開し，つぎを得た:
  - TextileSet を含む 2 次曲面を与えた．
  - これは TextileSet の概形を知る際の手掛かりとなる．

Summary

- TextilePlot の構造を調べるために，これを TextileSet $T_{n,p}$ として数学的に定式化した.
- 「微分幾何の観点からの TextilePlot の理解」としてつぎを得た:
  - 正則条件のもと，TextileSet $T_{n,p}$ は $np-(p+1)$ 次元コンパクト可微分多様体となる.
  - 今後の課題のひとつは $T_{n,p}$ の接空間を記述することであり，これにより「微分幾何の観点からの TextilePlot の理解」を深めることができる.
- TextileSet に対して解析幾何学 (幾何学に関する問題を座標によって数の問題に帰着して代数的に処理する幾何学) を展開し，つぎを得た:
  - TextileSet を含む 2 次曲面を与えた.
  - これは TextileSet の概形を知る際の手掛かりとなる.

References

1. K. Honda and J. Nakano, 3 dimensional parallel coordinate plot, *Proceedings of the Institute of Statistical Mathematics*, **55** (2007) 69–83.
2. N. Kumasaka and R. Shibata, The Textile Plot Environment, *Proceedings of the Institute of Statistical Mathematics*, **55** (2007) 47–68.
3. N. Kumasaka and R. Shibata, High-dimensional data visualisation: The textile plot, *Computational Statistics and Data Analysis*, **52** (2008) 3616–3644.
4. T. Sei and U. Tanaka, Geometric Properties of Textile Plot: *Geometric Science of Information, Lecture Notes in Computer Science*, **9389** (2015) 732–739.