

4種類の空間回帰モデルの優劣

北里大学 未来工学部 力丸佑紀
データサイエンスコンソーシアム, 慶應義塾大学 柴田里程





4 種類の空間回帰モデル

1. 空間ラグモデル(SLM)

$$\mathbf{y} = \lambda W \mathbf{y} + X \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$$

2. 空間誤差モデル(SEM)

$$\mathbf{y} = X \boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \lambda W \mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$$

3. 誤差が定常性をもつ空間回帰モデル 1

$$\mathbf{y} = X(\lambda) \boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad \lambda \sum_{k \in K} w_k u_{v+k} = \varepsilon_v$$
$$\varepsilon_v \sim N(0, \sigma^2)$$

4. 誤差が定常性をもつ空間回帰モデル 2

$$\mathbf{y} = X \boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad \lambda \sum_{k \in K} w_k u_{v+k} = \varepsilon_v$$
$$\varepsilon_v \sim N(0, \sigma^2)$$


空間回帰モデル

- 回帰モデル $y = X\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$

- 空間回帰モデル $y = X\beta + \varepsilon$



周りの値からも影響を受ける

- SEM (空間誤差モデル)

$$y = X\beta + u, \quad u = \lambda W u + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$$

λ : 自己回帰パラメータ

W : 空間重み行列

一方...

- 空間回帰モデル $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$



周りの値からも影響を受ける

- SLM (空間ラグモデル)

$$\mathbf{y} = \lambda \mathbf{W}\mathbf{y} + \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$$

λ : 自己回帰パラメータ

$\mathbf{W}$: 空間重み行列

SLMの書き換え

$$(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{W})\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

$\mathbf{S}(\lambda) = \mathbf{I} - \lambda \mathbf{W}$ とすると,

$$\mathbf{y} = \mathbf{S}(\lambda)^{-1} \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{S}(\lambda)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}$$

$\mathbf{X}(\lambda) = \mathbf{S}(\lambda)^{-1} \mathbf{X}$, $\mathbf{u} = \mathbf{S}(\lambda)^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}$ とすると,

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}(\lambda)\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad \underline{\mathbf{S}(\lambda)\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}}$$

$$\mathbf{u} = \lambda \mathbf{W}\mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

SEM vs. SLM

- SLM

$$\mathbf{y} = X(\lambda)\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad S(\lambda)\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 I)$$

- $E(\mathbf{y}) = X(\lambda)\boldsymbol{\beta}$

- $E(\mathbf{u}\mathbf{u}^T) = \sigma^2 (S(\lambda)^T S(\lambda))^{-1}$

λ の役割・解釈が
不明瞭

- SEM

$$\mathbf{y} = X\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad S(\lambda)\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 I)$$

- $E(\mathbf{y}) = X\boldsymbol{\beta}$: 外的要因

- $E(\mathbf{u}\mathbf{u}^T) = \sigma^2 (S(\lambda)^T S(\lambda))^{-1}$: 各点の互いの影響

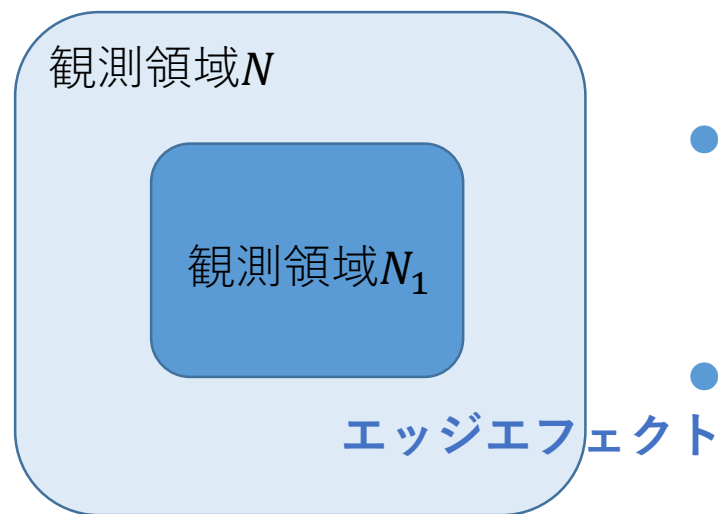
分かれていることが
解釈には重要

SEM(・SLM)の問題

- 誤差 $\mathbf{u}$ の非一貫性

$$S(\lambda)\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(0, \sigma^2 I) \text{ より}$$

$$\begin{aligned} E(\mathbf{u}\mathbf{u}^T) &= \sigma^2 S(\lambda)^{-1} \{S(\lambda)^{-1}\}^T \\ &= \sigma^2 (I - \lambda W)^{-1} \{(I - \lambda W)^{-1}\}^T \end{aligned}$$



- 観測領域 N での $\mathbf{u}$ の分散共分散行列

$$\sigma^2 (I - \lambda W)^{-1} \{(I - \lambda W)^{-1}\}^T$$

- 観測領域 N_1 での $\mathbf{u}_1$ の分散共分散行列

$$\sigma^2 (I - \lambda W_1)^{-1} \{(I - \lambda W_1)^{-1}\}^T$$

→ 観測領域が変わるたびに $\mathbf{u}$ の分布が変わる

誤差 $\mathbf{u}$ に定常性を仮定

- $\mathbf{u}$ の一貫性を確保する方法のひとつ
 - 誤差 $\mathbf{u}$ に定常性を仮定 $E(u_v u_{v'}) = \gamma_{v-v'}$

データ生成メカニズム

$$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \\ \underline{P(T_1, T_2)u_v = \varepsilon_v} \\ 1 - \lambda \sum_{k \in K} w_k T_1^{k_1} T_2^{k_2} \end{cases}$$

モデル (SEM)

$$\begin{cases} \mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{u} \\ \underline{S(\lambda)\mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}} \\ I - \lambda W \\ = I - \lambda \sum_{k \in K} w_k U_{n_1}^{k_1} U_{n_2}^{k_2} \end{cases}$$

定常性の仮定と $S(\lambda)$ の正則性の仮定はほぼ同等.

$$\sum_{k \in K} |w_k| \neq 0 \quad \text{and} \quad |\lambda| < \frac{1}{\sum_{k \in K} |w_k|}$$

4 種類の空間回帰モデル

λ の役割・解釈が不明瞭
 u の分布の非一貫性

1. 空間ラグモデル(SLM)

$$\mathbf{y} = \lambda W \mathbf{y} + X \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$$

3. 誤差が定常性をもつ空間回帰モデル 1

$$\mathbf{y} = X(\lambda) \boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad \lambda \sum_{k \in K} w_k u_{v+k} = \varepsilon_v$$
$$\varepsilon_v \sim N(0, \sigma^2)$$

λ の役割・解釈が不明瞭

u の分布の非一貫性

2. 空間誤差モデル(SEM)

$$\mathbf{y} = X \boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} = \lambda W \mathbf{u} + \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$$

4. 誤差が定常性をもつ空間回帰モデル 2

$$\mathbf{y} = X \boldsymbol{\beta} + \mathbf{u}, \quad \lambda \sum_{k \in K} w_k u_{v+k} = \varepsilon_v$$
$$\varepsilon_v \sim N(0, \sigma^2)$$