確率分布公式集

清水邦夫、渋谷政昭、 横内大介、高際睦*
慶応義塾大学理工学部（* 東京歯科大学）

2006-05-21

目 次

1　確率分布

1.1　モーメント

X を確率変数、t をある関数とし $t(X)$ の期待値 (expectation, あるいは平均 mean) を $E(t(X))$ で表す。確率関数 $p(x)$ をもつ離散確率変数、確率密度関数 $f(x)$ をもつ連続確率変数の場合は、それぞれ

$$\sum_{x=0}^{\infty} t(x)p(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} t(x)f(x)dx, \tag{1.1}$$

であり、和あるいは積分は絶対収束するものとする。この節では各種のモーメント、その母関数を導入する。

「確率変数 X の原点まわりの r 次モーメント (the r-th moment of X around the origin) あるいは非心モーメント (non-central moment)」

$$\mu'_r := E(X^r), \quad (r = 1, 2, \dots). \tag{1.2}$$

「r 次中心モーメント (central moment)」

$$\mu_r := E((X - \mu'_1)^r), \quad (r = 2, 3, \dots). \tag{1.3}$$

特に $\mu := \mu'_1$ は平均 (mean)、$\sigma^2 := Var(X) := \mu_2$ は分散 (variance)、 $\sigma =: SD(X)$ は標準偏差 (standard deviation) である。確率変数 X が正の値をとるとき、つまり $Pr\{X > 0\} = 1$ のとき、$CV(X) := \sigma/\mu = \sqrt{Var(X)}/E(X)$ を変動係数 (coefficient of variation) と呼ぶ。

$$\sqrt{\beta_1} = \mu_3/\sigma^3 = \mu_3/\mu_2^{3/2} \quad \text{歪度 skewness,}$$
$$\beta_2 = \mu_4/\sigma^4 = \mu_4/\mu_2^2 \quad \text{尖度 kurtosis.}$$

「確率変数 X の特性関数 (characteristic function, ch.f.)」

$$\varphi(t) := E(e^{itX}), \ i^2 = -1, \ -\infty < t < \infty. \tag{1.4}$$

特性関数とモーメントとの関係は、関数 φ が必要な階数だけ微分可能とすると、

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!}\mu'_k \quad \text{or} \quad \frac{1}{i^k}\varphi^{(k)}(0) = \mu'_k.$$

X の特性関数が $\varphi(t)$ ならば、$\eta + \xi X$ (η, ξ は定数) の特性関数は $e^{it\eta}\varphi(\xi t)$. X_k の特性関数が $\varphi_k(t), k = 1, 2$ で独立ならば、$X_1 + X_2$ の特性関数は $\varphi_1(t)\varphi_2(t)$.

「確率変数 X のモーメント母関数 (moment generating function, m.g.f.)」

$$M(t) = E(e^{tX}) = \varphi(t/i) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mu'_k. \tag{1.5}$$

これは確率密度関数のラプラス変換であり、すべてのモーメント μ'_k が有限で、ある定数 $t_0 > 0$ を適当に選んだとき、上の級数が $|t| < t_0$ で収束すれば存在する。

「確率変数 X のキュミュラント母関数 (cumulant generating function, c.g.f.)」

$$K(t) := \log(M(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\kappa_k,$$

ただし M は X のモーメント母関数で、 κ_r は「X の r 次キュミュラント （the r-th cumulant)」と呼ばれる。中心モーメントとの関係は次の通りである。

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\kappa_k = \log\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mu'_k\right) = \mu t + \log\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mu_k\right),$$

$$\kappa_1 = \mu,\ \kappa_2 = \mu_2 = \sigma^2,\ \kappa_3 = \mu_3,\ \kappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2,$$
$$\kappa_5 = \mu_5 - 10\mu_3\mu_2,\ \text{and}\ \kappa_6 = \mu_6 - 15\mu_4\mu_2 - 10\mu_3^2 + 30\mu_2^3.$$

逆に、

$$\mu = \kappa_1,\ \mu_2 = \kappa_2,\ \mu_3 = \kappa_3,\ \mu_4 = \kappa_4 + 3\kappa_2^2,$$
$$\sqrt{\beta_1} = \kappa_3/\kappa_2^{3/2},\ \beta_2 = \kappa_4/\kappa_2^2 + 3,$$
$$\mu_5 = \kappa_5 + 10\kappa_3\kappa_2,\ \text{and}\ \mu_6 = \kappa_6 + 15\kappa_4\kappa_2 + 10\kappa_3^2 + 15\kappa_2^3.$$

指数型の確率密度関数、確率関数は

$$\exp\{x\theta - b(\theta) + a(x)\} \tag{1.6}$$

の形をしており、そのキュミュラント母関数は、

$$K(t;\theta) = b(\theta + t) - b(\theta)$$

であり、したがって r 次キュミュラントは $(d/d\theta)^r b(\theta)$ である。

1.2 離散確率分布

ここでは非負の整数値をとる確率変数 X を扱う。

$$p(x) = Pr\{X = x\}, \quad x \in \mathcal{N}_0, \quad \mathcal{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}, \tag{1.7}$$

をその確率関数 (probability function, p.f. あるいは probability mass function, p.m.f.) と呼ぶ。数列 $(p(x))_{x=0}^{\infty}$ の母関数

$$G(t) = E(t^X) = \sum_{x=0}^{\infty} t^x p(x), \quad p(x) = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{dt^k}G(0). \tag{1.8}$$

を確率母関数 (probability generating function, p.g.f.) と呼ぶ。確率母関数の 1 における k 階微分係数 $(r = 1, 2, \dots)$ を $\mu'_{[k]}$ とすると、

$$G(1+w) = E((1+w)^X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}\mu'_{[k]},\ \mu'_{[k]} = E(X^{\underline{k}});\ x^{\underline{k}} = x(x-1)\cdots(x-k+1)\,, k = 0, 1, \dots,$$

となる。$\mu'_{[k]}$ を階乗モーメント (factorial moment) と呼ぶ。離散確率分布の場合には、他のモーメントよりも扱いやすいことがある。下降階乗積 $x^{\underline{k}}$ については 1.5 節準備を参照のこと。また、そこで説明するスターリング数を用いると、

$$\mu'_{[r]} = \sum_{k=1}^{r} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix} (-1)^{r-k}\mu'_k, \quad \mu'_r = \sum_{k=1}^{r} \begin{Bmatrix} r \\ k \end{Bmatrix} \mu'_{[k]}; \quad r = 1, 2, \dots$$

である。$G(t)$ を階乗モーメント母関数とも呼ぶ。

モーメント母関数からキュミュラント、キュミュラント母関数を導いたように、階乗モーメント母関数から階乗キュミュラント、階乗キュミュラント母関数 (factorial cumulant generating function, f.c.g.f.)

$$\log E((1+w)^X) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w^k}{k!}\kappa_{[k]}$$

を導ける。階乗キュミュラントと階乗モーメント、キュミュラントと原点まわりのモーメントの間には平行四辺形関係がある。

$$\kappa_{[r]} = \sum_{k=1}^{r} \begin{bmatrix} r \\ k \end{bmatrix} (-1)^{r-k}\kappa_k, \quad \kappa_r = \sum_{k=1}^{r} \left\{ \begin{matrix} r \\ k \end{matrix} \right\} \kappa_{[r]}; r = 1, 2, \ldots$$

$$\begin{array}{ccc} \text{原点モーメント} & \leftrightarrow & \text{階乗モーメント} \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \text{キュミュラント} & \leftrightarrow & \text{階乗キュミュラント} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \mu'_1 &= \kappa_1, \\ \mu'_2 &= \kappa_2 + \kappa_1^2, \\ \mu'_3 &= \kappa_3 + 3\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1^3, \\ \mu'_4 &= \kappa_4 + 4\kappa_1\kappa_3 + 3\kappa_1^2 \\ &\quad +6\kappa_1^2\kappa_2 + \frac{4}{3}\kappa_1\kappa_3 + \kappa_1^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu'_{[1]} &= \kappa_{[1]}, \\ \mu'_{[2]} &= \kappa_{[2]} + \kappa_{[1]}^2, \\ \mu'_{[3]} &= \kappa_{[3]} + 3\kappa_{[1]}\kappa_{[2]} + \kappa_{[1]}^3, \\ \mu'_{[4]} &= \kappa_{[4]} + 4\kappa_{[1]}\kappa_{[3]} + 3\kappa_{[1]}^2 \\ &\quad +6\kappa_{[1]}^2\kappa_{[2]} + \frac{4}{3}\kappa_{[1]}\kappa_{[3]} + \kappa_{[1]}^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \mu'_1 = \mu \\ \kappa_2 &= \mu'_2 - \mu^2, \\ \kappa_3 &= \mu'_3 - 3\mu'_2\mu + 2\mu^2, \\ \kappa_4 &= \mu'_4 - 4\mu'_3\mu - 3\mu'^2_2 + 12\mu'_2\mu^2 - 6\mu^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_{[1]} &= \mu'_{[1]} = \mu \\ \kappa_{[2]} &= \mu'_{[2]} - \mu^2, \\ \kappa_{[3]} &= \mu'_{[3]} - 3\mu'_{[2]}\mu + 2\mu^2, \\ \kappa_{[4]} &= \mu'_{[4]} - 4\mu'_{[3]}\mu - 3\mu'^2_{[2]} + 12\mu'_{[2]}\mu^2 - 6\mu^4, \end{aligned}$$

より一般に、$Pr\{X = x_k\} = p_k; x_k \in \mathcal{R}, p_k > 0, k = 1, 2, \ldots; x_j \neq x_k (j \neq k)$ のとき X は離散確率分布に従うという。上で述べた定義はこれより狭いが「個数、度数を数える（計数 enumeration）」のは日常的な仕事であり、統計の基本でも重要で、離散数学の一分野である。

1.3 連続な分布関数

確率変数 X_0 の分布関数 (distribution function, d.f.) を

$$F_0(x) = Pr\{X_0 \leq x\}, -\infty < x < \infty, \tag{1.9}$$

で表す。ここでは確率密度関数 (probability density function, p.d.f.)

$$f_0(x) = \frac{d}{dx}F_0(x), \tag{1.10}$$

が存在する場合だけを扱う。このとき、$X_0 \sim F_0(x), X_0 \sim f_0(x)$ などと記すことにする。

$X_0 \sim f_0(x) = (d/dx)F_0(x)$ のとき、$X = \eta + \xi X_0; \xi > 0, -\infty < \eta < \infty$, の d.f. F, p.d.f. f は、

$$F(x;\eta,\xi) = F_0\left(\frac{x-\eta}{\xi}\right), \quad f(x;\eta,\xi) = \frac{1}{\xi}f_0\left(\frac{x-\eta}{\xi}\right),$$

である。η,ξ を、それぞれ位置パラメータ (location parameter)、尺度パラメータ (scale parameter) と呼ぶ。確率密度関数の族 $\{f(x;\eta,\xi); \xi > 0, -\infty < \eta < \infty\}$ にたいして、$f_0(x) = f(x;0,1)$ を標準確率密度関数 (standard p.d.f.) とよぶ。多くの場合、標準確率密度関数は、平均 0 分散 1 となるように選ぶ。

d.f. F が単調増加であるとき、逆関数

$$F^{-1}(u;\eta,\xi) = F_0^{-1}(u)\xi + \eta, \quad 0 < u < 1, \tag{1.11}$$

を確率点関数 (quantile function) とよぶ。$F^{-1}(1/2;\eta,\xi)$ は中央値 (median) である。

X_0 が正の値を取る確率変数であるとする。 つまり d.f. が $F_0(0) = 0$ を満たす。通常 X_0 は寿命を表す。

$$h_0(x) = \frac{f_0(x)}{1-F_0(x)} = -\frac{d}{dx}\log(1-F_0(x)) \tag{1.12}$$

を、工学では瞬間故障率 (failure rate)、医学ではハザード関数 (hazard function 災厄関数) と呼ぶ。逆に

$$F_0(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x h_0(t)dt\right)$$

と表せる。（尺度パラメータだけ考えて）$X = \xi X_0$ のハザード関数は

$$h(x;\xi) = \xi^{-1}h_0(\xi^{-1}x).$$

1.4 確率分布族

確率変数 X の分布関数が F であるとき、$X \sim F$ と書き X が確率分布 F に従う、という。この分布関数は特性関数 φ から一意に定まるから、$X \sim \varphi$ と書いても同じである。さらに F が微分可能であれば、確率密度関数、あるいはハザード関数を指定してもよい。確率分布 (probability distribution) とは、これらの関数で定まる、確率変数の値の確率が分布している状況をを表す。

次節以降では、位置、尺度などのパラメータを持つ確率分布の族 (family) を、文字記号で表す。ほとんどの場合、確率分布族は、確率関数または確率密度関数の関数形により定義する。

1.5 確率変数の変換

確率変数 X が分布関数 $F(x)$, 確率密度関数 $f(x)$ をもつとする。$\varphi(x)$ が $\{x: 0 < F(x) < 1\}$ で増加関数であるとし、その逆関数を $\psi(t) = \varphi^{-1}(t)$ とする。ψ も増加関数である。$Y = \varphi(X)$ の分布関数は

$$G(y) = P\{Y = \varphi(X) \le y\} = P\{X \le \psi(y)\} = F(\psi(y)).$$

その確率密度関数は

$$g(y) = f(\psi(y))\psi'(y)$$

である。集合（事象）$A \subset R$ にたいして

$$\begin{aligned} P\{X \in A\} = \int_A f(x)dx &= \int_{\varphi(A)} f(\varphi(y))\varphi'(y)dy \\ &= \int_{\varphi(A)} g(y)dy = P\{Y \in \varphi(A)\} \end{aligned}$$

であり、f より g を求めることは積分変数の交換と同じである。

1.6　確率分布の混合

$F_i(x), i = 1, \ldots, k,$ が分布関数であるとき、

$$F(x) := \sum_{i=1}^{k} p_i F_i(x), \quad p_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} p_i = 1,$$

もまた分布関数である。$F(x)$ を $(F_1, \ldots, F_k)$ の $(p_1, \ldots, p_k)$ による混合 (mixture) とよぶ。確率分布の族 $\{F(x;\theta); \theta \in \Theta \subset R\}$ と、Θ 上の確率密度関数 $h(\theta)$, $\int_\Theta f(\theta) d\theta = 1$, にたいして

$$\int_\Theta F(x;\theta) h(\theta) d\theta$$

を $F(x;\theta)$ の混合分布 (mixing distribution) $h(\theta)$ による混合と呼ぶ。

1.7　準備

数列、関数の差分 (finite differnce)

$$\begin{aligned} &\triangle\, f(x) := f(x+1) - f(x), \quad \triangle^0\, f(x) := f(x), \quad \triangle^2\, f(x) := \triangle\, (\triangle\, f(x)), \quad \ldots \\ &\nabla f(x) := f(x) - f(x-1), \quad \nabla^0 f(x) := f(x), \quad \nabla^2 f(x) := \nabla(\nabla f(x)), \quad \ldots \end{aligned}$$

記号 $\triangle, \nabla$ を、それぞれ delta, nabla と読み、ここでの使い方を 前進差分演算子、後進差分演算子と呼ぶ。

階乗積 (factorial product)　　種々の記号法があるので要注意。

$$\begin{aligned}
&x^{\underline{n}} := x(x-1)\cdots(x-n+1) \quad \text{下降階乗積 (descending factorial moment)} \\
&x^{\overline{n}} := x(x+1)\cdots(x+n-1) \quad \text{上昇階乗積 (ascending factorial moment)} \\
&x^{\underline{0}} = x^{\overline{0}} = 1 \quad \text{とする} \\
&(-x)^{\underline{n}} = (-1)^n x^{\overline{n}}, \quad (-x)^{\overline{n}} = (-1)^n x^{\underline{n}} \\
&x^{\underline{n}} = x^{\underline{m}}(x-m)^{\underline{n-m}}, \quad x^{\overline{n}} = x^{\overline{m}}(x+m)^{\overline{n-m}}, \quad n \geq m \geq 0 \\
&n^{\underline{n}} = 1^{\overline{n}} = n!, \qquad n \text{ は非負整数} \\
&\triangle\, x^{\underline{n}} = n x^{\underline{n-1}}, \quad \triangle^m\, x^{\underline{n}} = \begin{cases} n^{\underline{m}} x^{\underline{n-m}}, & n \geq m \\ 0, & m > n \end{cases} \\
&\nabla x^{\overline{n}} = n x^{\overline{n-1}}, \quad \nabla^m x^{\overline{n}} = \begin{cases} n^{\underline{m}} x^{\overline{n-m}}, & n \geq m \\ 0, & m > n \end{cases}
\end{aligned}$$

$x^{\underline{n}}, x^{\overline{n}}$ を、それぞれ減少階乗積、増加階乗積とも呼ぶ。$x^{\underline{n}}$ の代わりに $x^{(n)}, (x)_n$ を、$x^{\overline{n}}$ の代わりに $x^{[n]}, (x)^n$ を使うことがある。解析学では Leo Pochhammer の記号法 $(x)_n$ を使うことが多い。しかしそれに対応する上昇階乗積の記号法 $(x)^n$ は誤解を招くので使われない。$(x)_n$ を拡張した $(x|t)_n = x(x-t)\cdots(x-(n-1)t)$ は、あまり使われていないが便利である。

２項係数（binomial coefficents）

$$\binom{a}{m} := \begin{cases} a^{\underline{m}}/m!, & m = 0,1,2,\ldots, \\ \qquad 0, & m = -1,-2,\ldots, \end{cases} \qquad -\infty < a < \infty.$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad n = 0,1,2,\ldots;\ m = 0,1,2,\ldots,n.$$

$$\binom{-a}{m} = (-1)^m \binom{a+m-1}{m}$$

$$\binom{a+1}{m} = \binom{a}{m-1} + \binom{a}{m}$$

$$\frac{a+1}{m+1}\binom{a}{m} = \binom{a+1}{m+1}, \quad \frac{a-m}{m+1}\binom{a}{m} = \binom{a}{m+1}$$

記号法 ${}_nC_m = \binom{n}{m}$ は使わないほうがよい。

２項展開（binomial expansion）

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$$

$$(a+b)^{\underline{n}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{\underline{j}} b^{\underline{n-j}} \quad \Leftrightarrow \quad \binom{a+b}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{a}{j}\binom{b}{n-j}$$

$$(a+b)^{\overline{n}} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{\overline{j}} b^{\overline{n-j}} \quad \Leftrightarrow \quad \binom{a+b+n-1}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{a+j-1}{j}\binom{b+n-j-1}{n-j}$$

$$\Leftrightarrow \quad \binom{-a-b}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{-a}{j}\binom{-b}{n-j}$$

$$(1+z)^w = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{w}{k} z^k, \quad |z| < 1, \quad \text{テイラー展開}$$

多項係数（multinomial coefficents）

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} := n!/\prod_{j=1}^{k} n_j!, \qquad n_j : \text{非負整数}, \sum_{j=1}^{k} n_j = n$$

$$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-\sum_{j=1}^{k-2} n_j}{n_{k-1}}$$

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)^n = \sum_{\sum n_j = n} \binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k} \prod_{j=1}^{k} a_j^{n_j} \qquad \text{多項展開}$$

スターリング数

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)\cdots(x+n-1) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k; \quad n = 0,1,\ldots$$

を変数 x についての多項恒等式とみなしたときの非負整数係数 $\left[{n \atop k}\right]$ を (符号なし) 第 1 種スターリング数 (Stirling numbers of the first kind) と呼ぶ。

$$\left[{n \atop 1}\right] = (n-1)!,\ n = 1, 2, \ldots; \quad \left[{n \atop n}\right] = 1,\ n = 0, 1, \ldots;$$
$$\left[{n+1 \atop k}\right] = \left[{n \atop k-1}\right] + n\left[{n \atop k}\right],\ 1 \leq k \leq n; \quad n = 1, 2, \ldots$$

ただし $\left[{n \atop k}\right] = 0,\ k < 1,\ k > n;\ n = 1, 2, \ldots; \left[{0 \atop k}\right] = 0,\ k \neq 0;$ とする。

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\cdots(x-n+1) = (-1)^n(-x)^{\overline{n}} = \sum_{k=1}^{n} \left[{n \atop k}\right] (-1)^{n-k} x^k;$$

から出発して $\left[{n \atop k}\right](-1)^{n-k}$ を (符号つき) 第 1 種スターリング数と呼ぶことが多い。

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{{n \atop k}\right\} x^{\underline{k}};\ n = 0, 1, \ldots$$

から同様に定まる係数 $\left\{{n \atop k}\right\}$ を第 2 種スターリング数と呼ぶ。これも非負整数であることが次の漸化式から分かる。

$$\left\{{n \atop 1}\right\} = 1,\ n = 1, 2, \ldots; \quad \left\{{n \atop n}\right\} = 1,\ n = 0, 1, \ldots;$$
$$\left\{{n+1 \atop k}\right\} = \left\{{n \atop k-1}\right\} + k\left\{{n \atop k}\right\},\ 1 \leq k \leq n; n = 1, 2, \ldots$$

ただし $\left\{{n \atop k}\right\} = 0,\ k < 1,\ k > n;\ n = 1, 2, \ldots; \left\{{0 \atop k}\right\} = 0,\ k \neq 0;$ とする。

$\left[{n \atop k}\right]$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0
3	0	2	3	1	0	0	0	0
4	0	6	11	6	1	0	0	0
5	0	24	50	35	10	1	0	0
6	0	120	274	225	85	15	1	0
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1

$\left\{{n \atop k}\right\}$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1

ガンマ関数 (gamma function)

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,\ 0 < x < \infty, \quad \text{(一般には非負整数を除く複素数);}$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x); \quad \Gamma(n+1) = n!,\ n = 0, 1, 2, \ldots; \quad 2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(2x)$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \quad \left(\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt = \int_{-\infty}^\infty e^{-v^2}dv \text{ の極座標変換により導く。}\right)$$

不完全ガンマ関数 (incomplete gamma function)

$$\begin{aligned}\gamma(x;k) :&= \frac{1}{\Gamma(k)}\int_x^\infty t^{k-1}e^{-t}dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(k)}x^{k-1}e^{-x} + \gamma(x;k-1) = \sum_{j=0}^{k-1}\frac{x^je^{-x}}{j!}.\end{aligned}$$

最後の式は k が正整数のときに限る。

ベータ関数 (beta function)

$$\begin{aligned}B(x,y) :&= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad x, y > 0, \quad \text{(一般には実部が正の複素数)} \\ &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta)^{2x-1}(\sin\theta)^{2y-1}d\theta\end{aligned}$$

$$\frac{1}{B(n,m)} = m\binom{n+m-1}{n-1} = n\binom{n+m-1}{m-1} \quad (n \text{ または } m \text{ が正整数のとき})$$

スターリング公式 (Stirling's formula)

$$n! = \sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}\left\{1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right\}, \quad n \to \infty,$$

$$\begin{aligned}\log\Gamma(x+1) &= \left(x+\frac{1}{2}\right)\log x - x + \frac{1}{2}\log 2\pi \\ &\quad + \sum_{k=2}^m \frac{(-1)^kB_k}{k(k-1)x^{k-1}} + O\left(\frac{1}{x^m}\right), \quad x \to \infty,\end{aligned}$$

ただし B_k はベルヌーイ数: $B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, \ldots; B_3 = B_5 = \cdots = 0$ であって、べき級数

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^\infty B_n\frac{z^n}{n!}$$

の係数として定義され、整数のべき乗和に現れる。

$$\sum_{k=0}^{n-1}k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^m\binom{m+k}{k}B_k\,n^{m+1-k}.$$

次の公式をスターリング公式より導ける。

$$\frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(x)} = x^\alpha\exp\left(\frac{\alpha(\alpha-1)}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right), \quad x \to \infty.$$

ポリガンマ関数

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z)$$

をプシー (psi) 関数またはディガンマ (digamma) 関数、

$$\psi^{(r)}(z) = \left(\frac{d}{dz}\right)^r \psi(z), \quad r = 0, 1, 2, \dots$$

をポリガンマ (polygamma) 関数と呼ぶ。$r = 1$ のときはトリガンマ (trigamma) 関数とも呼ぶ。

2 $(0,1,\ldots,n)$ 上の離散確率分布

2.1 二項分布

Bn (n,ξ) 二項分布 (binomial distribution).

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \binom{n}{x}\xi^x(1-\xi)^{n-x}, \quad 0 \le \xi \le 1, \qquad (2.1)\\
&= \frac{1}{(1+\alpha)^n}\binom{n}{x}\alpha^x, \quad \alpha = \frac{\xi}{1-\xi},\ 0 \le \alpha \le \infty,\ \xi = \frac{\alpha}{1+\alpha},\\
&= \binom{n}{x}\exp(x\theta - b(\theta)), \quad \theta = \log\frac{\xi}{1-\xi},\ -\infty \le \theta \le \infty,\ b(\theta) = n\log(1+e^\theta),\\
& x = 0,1,\ldots,n.
\end{aligned}
$$

ある事象 A の確率が ξ であるとき、n 回の独立な試行において事象 A の出現回数を X とすると、$p(x) = P\{X=x\}$ である。以下では、A が現れない確率 $\eta = 1-\xi$ の記号も使う。

$$
X \sim \mathsf{Bn}(n,\xi) \ \Leftrightarrow\ n - X \sim \mathsf{Bn}(n,\eta).
$$

$$
\sum_{y=x}^{n}\binom{n}{y}\xi^y(1-\xi)^{n-y} = \frac{1}{B(x,n-x+1)}\int_0^{\xi}u^{x-1}(1-u)^{n-x}du, \quad x = 1,\ldots,n.
$$

この等式の右辺は、ベータ分布 Be $(x,n-x+1)$ の分布関数である。

$$
\begin{gathered}
ch.f.(t) = (\eta + \xi e^{it})^n,\\
p.g.f.(t) = (\eta + \xi t)^n = \left(\frac{1+\alpha t}{1+\alpha}\right)^n,\\
f.c.g.f.(t) = n\log(1+\xi t),\\
c.g.f.(t) = b(\theta+t) - b(\theta), \quad \kappa_r = b^{(r)}(\theta), r = 0,1,2,\ldots
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
E(X^{\underline{r}}) = n^{\underline{r}}\xi^r,\ E(X^{\underline{r}}(n-X)^{\underline{s}}) = n^{\underline{r+s}}\xi^r\eta^s, \quad r,s = 0,1,2,\ldots,\\
E(X) = n\xi, \quad Var(X) = \kappa_2 = n\xi\eta,\\
\kappa_3 = n\xi\eta(2\eta-1) = n\xi\eta(\eta-\xi), \quad \kappa_4 = n\xi\eta(6\eta^2 - 6\eta + 1) = n\xi\eta(1-6\xi\eta).
\end{gathered}
$$

“mode” $= [(n+1)\xi - 1] = \lfloor (n+1)\xi - 1 \rfloor$, $(n+1)\xi$が整数ならば $p((n+1)\xi - 1) = p((n+1)\xi)$,

ただし $[\ ], \lfloor\ \rfloor$ は整数部分を表す。

$X_j \sim$ Bn $(n_j,\xi), j = 1,\ldots,k$ が独立ならば、$\sum_{j=1}^k X_j \sim$ Bn $(\sum_{j=1}^k n_j,\xi)$.

$X \sim$ Bn (n,ξ) のとき、$Y \sim$ Bn (X,ρ) ならば、$Y \sim$ Bn $(n,\xi\rho)$ であり、$Y = y$ の条件の下で $X - y \sim$ Bn $(n-y,\xi(1-\rho)/(1-\xi\rho))$.

$X \sim$ Bn (n,ξ) のとき、$Y \sim$ Hg $(n;m,X),\ m \le n,$ (超幾何分布) ならば、$Y \sim$ Bn $(m,\xi), Z = X - Y \sim$ Bn $(n-m,\xi)$ であり、Y と Z は独立。

$Y_k \sim$ Po $(\lambda_k); k = 1,2,$ (ポアソン分布) が独立ならば、$Y_1 + Y_2 = n$ の条件の下で、$Y_1 \sim$ Bn $(n,\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2))$.

ポアソン分布、正規分布への分布収束：

$$
\begin{gathered}
X \sim \mathsf{Bn}(n,\xi) \ \to\ X \sim \mathsf{Po}(\lambda), (n\xi = \lambda, n \to \infty, \xi \to 0),\\
\frac{X - n\xi}{\sqrt{n\xi\eta}} \ \to\ X \sim \mathsf{N}(0,1), (n \to \infty).
\end{gathered}
$$

ベルヌーイ試行列

$X_n \sim$ Bn $(1,\xi), n = 1, 2, \ldots,$ が独立な、有限または無限の系列であるとする。つまり独立な試行の系列で、各試行において確率 ξ のある事象 A が生じるか生じないか ($X_n = 1$ または $= 0$ で表わす) だけを考える。これをベルヌーイ試行列 (Bernoulli sequence of trials) と呼ぶ。

参照

竹内啓、藤野和建 (1981) 2 項分布とポアソン分布、東京大学出版会。

2.2 超幾何分布

Hg $(N; m, n)$:　超幾何分布 (hypergeometric distribution).

$$\begin{aligned} p(x) &= \binom{m}{x}\binom{N-m}{n-x}\Big/\binom{N}{n} = \binom{m}{x}\frac{n^{\underline{x}}(N-n)^{\underline{m-x}}}{N^{\underline{m}}} \\ &= \binom{n}{x}\binom{N-n}{m-x}\Big/\binom{N}{m} = \binom{n}{x}\frac{m^{\underline{x}}(N-m)^{\underline{n-x}}}{N^{\underline{n}}}, \\ & x = 0, 1, \ldots, n; \quad m, n, N \in \mathcal{N}, (m, n \le N). \end{aligned} \tag{2.2}$$

$\max(0, m+n-N) \le x \le \min(m, n)$ のとき $p(x) > 0$ であり、それ以外では $p(x) = 0$ である。$p(x)$ は m, n に関して対称である。

N 個の「もの」を、二つの排他的なカテゴリー A と $\overline{A}$ に、m 個と $N-m$ 個ずつ確率的に分ける（非復元単純確率抽出)。また、これと独立に、二つのカテゴリー B と $\overline{B}$ に、n 個と $N-n$ 個ずつ確率的に分ける。その結果、N 個のものが、 2 x 2 = 4 個のカテゴリー に分かれる。これを 表 1 のような「分割表 (contingency table)」に表わす。一つの項目 (セル) が定まると他のすべての項目が定まり、下記のようにどの項目も超幾何分布に従う。$p(x) > 0$ となるのは、四つの項目がすべて正の範囲である。

$$\begin{aligned} X \sim \mathsf{Hg}(N; m, n) &\Leftrightarrow m - X \sim \mathsf{Hg}(N; m, N-n), \\ &\Leftrightarrow n - X \sim \mathsf{Hg}(N; N-m, n), \\ &\Leftrightarrow N - m - n + X \sim \mathsf{Hg}(N; N-m, N-n). \end{aligned}$$

$$ch.f.(t) = \frac{F(-m, -n; N-m-n+1; e^{it})}{F(-m, -n; N-m-n+1; 1)},$$

ただし、

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{\overline{n}}\beta^{\overline{n}}}{\gamma^{\overline{n}} n!} z^n$$

表 1: 2 × 2 contingency table

	B	$\overline{B}$	sum
A	x	$m-x$	m
$\overline{A}$	$n-x$	$N-m-n+x$	$N-m$
sum	n	$N-n$	N

はガウス超幾何関数 である。

$$
\begin{aligned}
E(X^{\underline{r}}) &= \frac{n^{\underline{r}} m^{\underline{r}}}{N^{\underline{r}}}, \\
E(X^{\underline{r}}(n-X)^{\underline{s}}) &= \frac{n^{\underline{r+s}} m^{\underline{r}} (N-m)^{\underline{s}}}{N^{\underline{r+s}}}, \quad r,s=0,1,2,\ldots, \\
E(X^{\underline{r}}(m-X)^{\underline{s}}) &= \frac{m^{\underline{r+s}} n^{\underline{r}} (N-n)^{\underline{s}}}{N^{\underline{r+s}}}, \quad r,s=0,1,2,\ldots, \\
E(X) = \frac{mn}{N}, &\quad Var(X) = \frac{mn(N-m)(N-n)}{(N-1)N^2}.
\end{aligned}
$$

$Y_k \sim$ Bn $(n_k,\xi); k=1,2,$（二項分布）が独立ならば、$Y_1+Y_2=m$ の条件の下で、$Y_1 \sim$ Hg $(n_1+n_2;m,n_1)$.
$X \sim$ Hg $(N;M,n)$ のとき、$Y \sim$ Hg $(n;X,m),\ m \le n$ ならば、$Y \sim$ Hg $(N;M,m)$ であり、$Y=y$ の条件の下で、$X-y \sim$ Hg $(N-m;M-y,n-m)$.

二項分布への分布収束：
$X_N \sim$ Hg $(N;m,n) \to X \sim$ Bn $(n,\xi), (N\xi=m, N\to\infty, m\to\infty)$（二項分布）

2.3 負の超幾何分布

NgHg $(n;\alpha,\beta)$: 負の超幾何分布 (negative hypergeometric distribution).

別名：ベータ二項分布 (beta binomial distribution)、ポリア-エッゲンバーガ分布 (Pólya-Eggenberger distribution, Markov-Pólya-Eggenberger distribution, Pólya distribution).

$$
\begin{aligned}
p(x) &= \binom{-\alpha}{x}\binom{-\beta}{n-x}\Big/\binom{-\alpha-\beta}{n} \\
&= \binom{\alpha+x-1}{x}\binom{\beta+n-x-1}{n-x}\Big/\binom{\alpha+\beta+n-1}{n} \\
&= \frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\alpha)x!}\frac{\Gamma(\beta+n-x)}{\Gamma(\beta)(n-x)!}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)n!}{\Gamma(\alpha+\beta+n)} \\
&= \binom{n}{x}\frac{\alpha^{\overline{x}}\beta^{\overline{n-x}}}{(\alpha+\beta)^{\overline{n}}}, \\
&\quad x=0,1,\ldots,n;\ \alpha>0,\ \beta>0.
\end{aligned} \tag{2.3}
$$

超幾何分布 (2.2) の第 2 式と比較せよ。

特別な場合: $X \sim$ NgHg $(n;1,\beta)$.

$$
p(x) = \frac{n^{\underline{x}}\beta^{\overline{n-x}}}{(\beta+1)^{\overline{n}}} = \frac{\beta n^{\underline{x}}}{(\beta+n)^{\underline{x+1}}}.
$$

$X \sim$ NgHg $(n;1,\beta)$ ならば、$X>0$ の条件の下で $X-1 \sim$ NgHg $(n-1;1,\beta)$.

$X \sim$ NgHg$(n;1,1)$

$$
p(x) = 1/(n+1),\ x=0,1,\ldots,n,
$$

これは離散一様分布である。Be (1,1) (ベータ分布) と比較せよ。

$$
X \sim \text{NgHg}(n;\alpha,\beta) \Leftrightarrow n-X \sim \text{NgHg}(n;\beta,\alpha).
$$

$$ch.f.(t) = \frac{F(\alpha, -n; -\beta - n + 1; e^{it})}{F(\alpha, -n; -\beta - n + 1; 1)},$$

ただし、F はガウス超幾何関数である。

$$E(X^{\underline{r}}) = \frac{n^{\underline{r}}\alpha^{\overline{r}}}{(\alpha+\beta)^{\overline{r}}},$$

$$E(X^{\underline{r}}(n-X)^{\underline{s}}) = \frac{n^{\underline{r+s}}\alpha^{\overline{r}}\beta^{\overline{s}}}{(\alpha+\beta)^{\overline{r+s}}}, \quad r, s = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$E(X) = \frac{n\alpha}{\alpha+\beta}, \quad Var(X) = \frac{n\alpha\beta(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

ポリアの壺: 壺の中に黒玉が b 個、白玉が w 個入っている。玉をでたらめに 1 個取り出し、戻すときに取り出した玉と同色の玉を 1 個追加する。n 回試行で黒玉が x 回現れ、その結果黒玉が $b+x$ 個、白玉が $w+n-x$ 個となる確率は、黒、白の出現順序によらないから、

$$\binom{n}{x}\frac{b^{\overline{x}}w^{\overline{n-x}}}{(b+w)^{\overline{n}}}, \quad x = 0, 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots$$

である。

c を任意の正整数とし、玉を戻すときに同色の玉を c 個加えると、n 回試行で黒が x 個白が $n-x$ 回現われて、黒玉が $b+cx$ 個白玉が $w+c(n-x)$ 個の状態となる確率は

$$\binom{n}{x}\frac{b(b+c)\cdots(b+c(x-1))w(w+c)\cdots(w+c(n-x-1))}{(b+w)(b+w+c)\cdots(b+w+c(n-1))} = \binom{n}{x}\frac{\alpha^{\overline{x}}\beta^{\overline{n-x}}}{(\alpha+\beta)^{\overline{n}}},$$
$$x = 0, 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots;\ \alpha = b/c,\ \beta = w/c.$$

つまり、α, β が有理数のときも壺のモデルで説明できる。

離散順序統計量

$\{1, \ldots, N\}$ から n 個の数をランダムに非復元抽出し、大きさの順に並べたものを $X_1 < \cdots < X_n$ とする。順序統計量 $X_j,\ 1 \le j \le n,$ の確率分布は

$$P\{X_j = x\} = \binom{x-1}{j-1}\binom{N-x}{n-j}\Big/\binom{N}{n} \quad j \le x \le N-n+j,\ j \le n \le N.$$

あるいは $X_j - j \sim \mathsf{NgHg}(N-n; j, n-j+1)$.

他の分布との関係

$Y_k \sim \mathsf{NgBn}\ (\xi, \alpha_k), k = 1, 2,$ （負の二項分布）が独立ならば、$Y_1 + Y_2 = n$ の条件の下で、$Y_1 \sim \mathsf{NgHg}\ (n; \alpha_1, \alpha_2)$.

$X \sim \mathsf{Bn}\ (n, u)$（二項分布）で、$u \sim \mathsf{Be}\ (\alpha, \beta)$ （ベータ分布）ならば、$X \sim \mathsf{NgHg}\ (n; \alpha, \beta)$. したがってベータ二項分布と呼ばれる。

$X \sim \mathsf{NgHg}\ (n; \alpha, \beta)$ のとき、$Y \sim \mathsf{Hg}\ (n; X, m),\ m \le n$ ならば、$Y \sim \mathsf{NgHg}\ (m; \alpha, \beta)$ であり、$Y = y$ の条件の下で、$X - y \sim \mathsf{NgHg}\ (n-m; \alpha+y, \beta+m-y)$.

二項分布、負の二項分布への分布収束：

$$X_n \sim \mathsf{NgHg}(n, \alpha_n, \beta_n) \to X \sim \mathsf{Bn}(n, \xi), (\xi = \alpha_n/(\alpha_n+\beta_n), \alpha_n \to \infty, \beta_n \to \infty).\text{（二項分布）}$$
$$X_n \sim \mathsf{NgHg}(n, \alpha, \beta_n) \to X \sim \mathsf{NgBn}(\xi, \alpha), (\xi = \beta_n/(n+\beta_n), n \to \infty, \beta_n \to \infty).\text{（負の二項分布）}$$

$X_n \sim$NgHp $(n;\alpha,\beta)$ のときベータ分布への分布収束：

$$p(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+x)}{x!}\;\frac{\Gamma(\beta+n-x)}{(n-x)!}\Bigg/\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n)}{n!}$$

より、$n \to \infty,\, x \to \infty,\, x/n \to u$ のとき

$$p^*(u) = \frac{p(n\,u)}{n} = \frac{1}{B(\alpha,\beta)} u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}\exp\left(O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad 0<u<1.$$

したがってこのとき、X_n/n は Be (α,β) (ベータ分布) に分布収束する。

3 $(0,1,\ldots,\infty)$ 上の離散確率分布

3.1 ポアソン分布

Po (λ): ポアソン分布 (Poisson distribution).

$$\begin{aligned} p(x) &= e^{-\lambda}\lambda^x/x!, \quad x=0,1,2,\ldots,\ 0<\lambda, \\ &= \exp(x\theta - b(\theta))/x!, \quad \theta = \log\lambda,\ -\infty<\theta<\infty,\ b(\theta)=e^\theta=\lambda. \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} ch.f.(t) &= \exp(\lambda(e^{it}-1)), \\ p.g.f.(t) &= \exp(\lambda(t-1)), \\ f.c.g.f.(t) &= \lambda t, \\ c.g.f.(t) &= b(\theta+t)-b(\theta), \quad \kappa_r = b^{(r)}(\theta) = e^\theta = \lambda,\ r=0,1,2,\ldots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^{\underline{r}}) &= \lambda^r, \quad r=0,1,2,\ldots, \\ E(X) &= Var(X) = \lambda. \end{aligned}$$

$$p(x+1)/p(x) = \lambda/(x+1), \quad xp(x)/p(x-1) = \lambda,$$

$$\text{“mode”} = [\lambda], (= \lfloor\lambda\rfloor).$$

$$\sum_{x=0}^{y} p(x) = \frac{1}{\Gamma(y+1)}\int_\lambda^\infty t^y e^{-t}dt.$$

右辺は Ga $(y+1,1)$（ガンマ分布）の上側確率である。

$X_j \sim \mathrm{Po}(\lambda_j), j=1,\ldots,k$ が独立ならば、$\sum_{j=1}^k X_j \sim \mathrm{Po}(\sum_{j=1}^k \lambda_j)$.

$X_j \sim \mathrm{Po}(\lambda_j), j=1,2$ が独立ならば、$X_1+X_2=n$ の条件の下で、$X_1 \sim$ Bn$(n,\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2))$.

$X \sim$ Po (λ) のとき、$Y \sim$ Bn (X,ρ) ならば、$Y \sim$ Po $(\lambda\rho), Z = X-Y \sim$ Po $(\lambda(1-\rho))$ であり、Y と Z は独立。

まれに起こる事象の数が従う基本的な分布がポアソン分布である。確率分布の系列の極限がポアソン分布となる極限定理を「少数の法則 (law of small numbers)」とよぶ。まれに起こる事象の数は、多くのモデルのもとで、ポアソン分布で近似することができる。

参照

Haight, F. A. (1967) *Handbook of the Poisson distribution,* Wiley.

Barbour, A. D., Holst, L., and Janson, S. (1992) *Poisson Approximation,* Oxford University Press.

Falk, M., Hüsler, J., and Reiss, R.-D. (1994) *Laws of Small Numbers: Extreme and Rare Events,* Birkhäuser, Basel.

Kingman, J. F. C. (1993) *Poisson Process,* Oxford University Press.

3.2 負の二項分布

NgBn (ξ, k): 負の二項分布 (negative binomial distribution).

$$\begin{aligned} p(x) &= \binom{k+x-1}{x}\xi^k(1-\xi)^x, \quad 0<\xi<1, 0<k<\infty, \qquad (3.2)\\ &= (1-\eta)^k\binom{-k}{x}(-\eta)^x, \quad \eta = 1-\xi,\\ &= \frac{\Gamma(k+x)}{\Gamma(k)x!}\left(\frac{k}{k+\mu}\right)^k\left(\frac{\mu}{k+\mu}\right)^x, \quad \mu = \frac{k(1-\xi)}{\xi}\in(0,\infty),\\ &= \binom{k+x-1}{x}\exp(x\theta - kb(\theta)), \quad \theta=\log(1-\xi),\ -\infty<\theta<0,\ b(\theta) = -\log(1-e^\theta) = -\log\xi,\\ &\quad x = 0,1,2,\ldots,; \end{aligned}$$

特別な場合。

NgBn $(\xi, k), k = 1, 2, \ldots$: パスカル分布 (Pascal distribution); NgBn $(\xi, 1)$: 幾何分布 (geometric distribution). k が正の整数ならば、独立同一試行の系列で、確率 ξ の事象 A が k 回現れるまでの、事象 A の現れない試行数 X の確率関数が $P\{X=x\} = p(x)$ である。k 回現れるまでの試行総数 $X+k$ の確率分布 $p(x-k), x = k, k+1, \ldots,$ を考えることもある。

$$ch.f.(t) = \left(\frac{1}{\xi} - \frac{\eta}{\xi}e^{it}\right)^{-k} = \left(\frac{\xi}{1-\eta e^{it}}\right)^k$$

$$f.c.g.f.(t) = -k(\log(1-\eta t) - \log\xi)$$

$$c.g.f.(t) = k(b(\theta+t) - b(\theta))$$

$$\kappa_r = k(d/d\theta)^r b(\theta)$$

$$E(X^{\underline{r}}) = (k+r-1)^{\underline{r}}(\eta/\xi)^r, \quad r = 1,2,\ldots,$$

$$E(X) = \frac{k\eta}{\xi}, \quad Var(X) = \frac{k\eta}{\xi^2} = \frac{\mu(\mu+k)}{k}.$$

$X_j \sim$ NgBn $(\xi, k_j), j = 1, 2, \ldots$ が独立ならば、$\sum_j X_j \sim$ NgBn $(\xi, \sum_j k_j)$.

$X \sim$ Po (v) （ポアソン分布）で $v \sim$ Ga (k, a) （ガンマ分布）ならば、$X \sim$ NgBn $(\xi, k), \xi = 1/(a+1)$.

$X \sim$ NgBn (ξ, k) のとき、$Y \sim$ Bn(X, ρ) (2 項分布) ならば、$Y \sim$ NgBn$(\xi/(1-(1-\xi)(1-\rho)), k)$, $E(Y) = E(X)\rho$, $X - Y|Y = y \sim$ NgBn$(1-(1-\xi)(1-\rho), k+y)$.

$X_j \sim$ LgSer $(\xi), j = 1, 2, \ldots,$ （対数級数分布）が独立、$M \sim$ Po (λ) （ポアソン分布）が X_j と独立ならば,

$$X_1 + \cdots + X_M \sim \text{NgBn } (\theta, k); \theta = 1-\xi, k = -\lambda/\log(1-\xi).$$

$X_k \sim$ NgBn $(\xi, k) \to X \sim$ Po $(\mu), (\mu = k(1-\xi)/\xi, k\to\infty, \xi\to 1)$（ポアソン分布）.

$X_j \sim$ NgBn $(\xi, k_j), j=1,2,$ が独立ならば、$X_1+X_2=n$ の条件のもとで、$X_1 \sim$ NgHg $(n; k_1, k_2)$（負の超幾何分布）.

幾何分布　Geo $(\xi) =$ NgBn $(\xi, 1)$: 幾何分布 (geometric distribution).

$$p(x) = \xi\eta^x, x=0,1,\ldots; \eta = 1-\xi; 0<\xi<1;$$
$$Q(x) := \sum_{y=x}^{\infty} p(y) = \eta^x, x=0,1,\ldots,$$
$$\frac{p(x+y)}{Q(y)} = p(x), x,y=0,1,2,\ldots, \text{“a lack of memory”}.$$
$$E(X) = \eta/\xi, \quad Var(X) = \eta/\xi^2.$$

$X_j \sim$ Geo $(\xi), j=1,\ldots,n$ が独立ならば、$\min(X_1,\ldots,X_n) \sim$ Geo $(1-\eta^n)$.

3.3　一般超幾何分布 (B3)

GHgB3 $(\alpha, \beta; \gamma)$: B3 型一般超幾何分布 (generalized hypergeometric distribution of type B3).

別名：逆負の超幾何分布 (inverse negative-Hypergeometric distribution)、逆ポリア-エッゲンバーガ分布 (inverse Pólya-Eggenberger distribution)、ベータ負の二項分布 (beta negative-binomial distribution)、一般ウェアリング分布 (generalized Waring distribution).

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{B(\alpha+\gamma, \beta+x)}{B(\beta,\gamma)}\frac{\Gamma(\alpha+x)}{\Gamma(\alpha)x!} = \frac{B(\beta+\gamma, \alpha+x)}{B(\alpha,\gamma)}\frac{\Gamma(\beta+x)}{\Gamma(\beta)x!} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(\alpha+x)\Gamma(\beta+x)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\beta+\gamma+x)x!} = \frac{\Gamma(\alpha+\gamma)\Gamma(\beta+\gamma)}{\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)\Gamma(\gamma)}\frac{\alpha^{\overline{x}}\beta^{\overline{x}}}{(\alpha+\beta+\gamma)^{\overline{x}}x!} \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$ch.f.(t) = \frac{F(\alpha,\beta;\alpha+\beta+\gamma;e^{it})}{F(\alpha,\beta;\alpha+\beta+\gamma;1)},$$
$$E(X^{\underline{r}}) = \frac{\alpha^{\overline{r}}\beta^{\overline{r}}}{(\gamma-1)^{\underline{r}}}, \ r=1,2,\cdots<\gamma, \quad E(X) = \frac{\alpha\beta}{\gamma-1} =: \mu$$
$$Var(X) = \frac{\alpha\beta(\alpha+\gamma-1)(\beta+\gamma-1)}{(\gamma-2)(\gamma-1)^2} = \mu\left(1+\frac{\mu+\alpha+\beta+1}{\gamma-2}\right).$$

$X \sim$NgBn (U, α) (負の二項分布) の U が確率変数で、$U \sim$Be (γ, β) (ベータ分布) ならば、$X \sim$GHgB3 $(\alpha, \beta; \gamma)$. したがってベータ負の二項分布と呼ぶ。

ウェアリング分布 (Waring distribution)： GHgB3 $(\alpha, 1; \gamma)$.

$$\frac{1}{c-a} = \frac{1}{c} + \frac{a}{c(c+1)} + \frac{a(a+1)}{c(c+1)(c+2)} + \cdots$$

をウェアリング展開と呼ぶことによる。

ユール分布 (Yule distribution)： GHgB3 $(1, 1; \gamma)$. あるいは $Y = 1+X$, $X \sim$GHgB3 $(1, 1; \gamma)$, の分布をユール分布と呼ぶ。

$$p^*(y) = \frac{\gamma(y-1)!}{(1+\gamma)^{\overline{y}}}, \quad y=1,2,\ldots$$

ポリアの壺: 負の超幾何分布の「ポリアの壺」では、黒玉が αc 個、白玉が βc 個ある壺から、でたらめに 1 個玉を取り出し、同色の玉を c 個加えて戻す。n 個の試行で現われる黒玉の個数を X_n とすると

$$P\{X_n = x\} = \binom{n}{x} \frac{\alpha^{\overline{x}} \beta^{\overline{n-x}}}{(\alpha+\beta)^{\overline{n}}}, \quad x = 0, 1, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots,$$

である。変数列 $(X_n)_{n=1}^{\infty}$ で初めて $X_n = m$ に達するときの n を W_m とする。つまり

$$W_m = n \quad \Leftrightarrow \quad X_{n-1} = m-1 \ \&\ X_n = m.$$

したがって

$$P\{W_m = w\} = \binom{w-1}{m-1} \frac{\alpha^{\overline{m}} \beta^{\overline{w-m}}}{(\alpha+\beta)^{\overline{w}}}, \quad w = m, m+1, \ldots,$$

である。初めて $X_n = m$ となるまでに現われる白玉の数、つまり無駄な待ち時間 $Y = W_m - m$ の確率分布は

$$P\{Y = y\} = \frac{\Gamma(\alpha+m)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\beta+m)} \frac{m^{\overline{y}} \beta^{\overline{y}}}{(\alpha+\beta+m)^{\overline{y}} y!}, \quad y = 0, 1, \ldots$$

これは GHgB3 $(m, \beta; \alpha)$ である。

一般超幾何分布 (generalized hypergeometric distribution)　GHg $(a, b; c)$

$$p(x) = \frac{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c-a-b)\Gamma(a)\Gamma(b)} \frac{\Gamma(x+a)\Gamma(x+b)}{\Gamma(x+1)\Gamma(x+c)}.$$

ただし m, n が正整数のとき、$\Gamma(-n)/\Gamma(-m) = (-1)^{n-m} m!/n!$ とする。Type B3 は、清水良一の次の分類 (1968 統計数理研究所彙報 16,147–165) に従う名称である。

Type A1.　GHg$(-\xi, -n; \zeta)$, $\zeta > 0, \xi > n-1$,　超幾何分布、正の超幾何分布.

Type A2.　GHg$(\xi, -n; -\zeta)$, $\xi > 0, \zeta > n-1$,　負の超幾何分布.

Type B3.　GHg$(\xi, \eta; \xi+\eta+\zeta)$, $\xi, \eta, \zeta > 0$,　B3 型一般超幾何分布.

4　$(1, 2, \ldots, \infty)$ 上の離散確率分布

4.1　対数級数分布

LgSer (ξ)　対数級数分布 (logarithmic series distribution).

$$p(x) = \frac{\alpha \xi^x}{x},\ x \in \mathcal{N};\ \alpha = (-\log(1-\xi))^{-1}, \quad 0 < \xi < 1; \tag{4.1}$$

$$ch.f.(t) = \frac{-\log(1-\xi e^{it})}{-\log(1-\xi)},$$

$$E(X^{\underline{r}}) = \alpha \xi^r (r-1)!(1-\xi)^{-r}, \quad E(X) = \frac{\alpha\xi}{1-\xi}, \quad Var(X) = \frac{\alpha\xi(1-\alpha\xi)}{(1-\xi)^2},$$

$X \sim$ NgBn (ξ, k) とする。$X > 0$ の条件のもとで、$k \to 0$ ときの、 X の極限分布は LgSer $(1-\xi)$ である。

$X_j \sim$ LgSer $(\xi), j = 1, 2, \ldots,$ が独立、$M \sim$ Po (λ) が X_j と独立ならば,

$$X_1 + \cdots + X_M \sim \textsf{NgBn}\ (\theta, k); \theta = 1 - \xi, k = -\lambda / \log(1 - \xi).$$

$X_j \sim$ LgSer $(\xi), j = 1, \ldots, k$ が独立ならば、

$$Pr\{X_1 + \cdots + X_k = x\} = \frac{k!}{(-\log(1-\xi))^k} \left[\begin{matrix} x \\ k \end{matrix} \right] \frac{\xi^x}{x!}, \quad x = k, k+1, \ldots, \tag{4.2}$$

ただし $\left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right]$ は符号なし第 1 種スターリング数で $\sum_{m=1}^{n} \left[\begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right] x^m = x^{\overline{n}} = x(x+1) \cdots (x+n-1)$.

5　$(0,1)$ 上の連続確率分布

5.1　一様分布

Un $(0,1)$:　$(0,1)$ 上の一様分布 (uniform distribution).

Un $(0,1) =$ Be $(1,1)$. （ベータ分布）

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \le x < 1, \\ 1, & 1 \le x. \end{cases} \tag{5.1}$$

一様とは確率密度関数がこの区間上で一定値だからである。

$$E(X) = \frac{1}{2}, \quad Var(X) = \frac{1}{12}, \quad C.V.(X) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$ch.f.(t) = (it)^{-1}(\exp(it) - 1),$$
$$E(X^r) = \frac{1}{r+1}, \quad E(X^r(1-X)^s) = \frac{r!s!}{(r+s+1)!}, \quad r, s = 0, 1, 2, \ldots,$$
$$E((X-1/2)^r) = \begin{cases} 0, & r \quad \text{odd}, \\ 2^{-r}/(r+1), & r \quad \text{even}. \end{cases}$$

$X_0 \sim$ Un $(0,1)$ のときに、$X = a + bX_0$ の確率密度関数は、

$$g(x) = \begin{cases} 1/b, & a < x < a+b, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$$

これは区間 $(a, a+b)$ の上の一様分布で、記号 Un (a,b) で表す。そのグラフの形から、長方形分布 (rectangular distribution) とも呼ぶ。

任意の確率変数 Y の分布関数とその広義逆関数を

$$G(y) \ := \ P\{Y \le y\}, \quad G^{-}(u) \ := \ \inf\{y : G(y) \ge u\}, \quad 0 < u < 1,$$

とすると、

$$X \sim \mathsf{Un}(0,1) \quad \text{のときに} \quad Y = G^{-}(X) \sim G(y),$$
$$G(y) \text{ が連続ならば } G(Y) \sim \mathsf{Un}(0,1).$$

$(X_1, \cdots, X_n)$ を Un $(0,1)$ からの確率標本, $X_{(1)} \le \cdots \le X_{(n)}$ をその順序統計量とすると、

$$X_{(k)} \sim \mathsf{Be}(k, n-k+1), \ 1 \le k \le n, \text{（ベータ分布）}$$
$$X_{(k)} - X_{(j)} \sim \mathsf{Be}(k-j, n-(k-j)+1), \quad 1 \le j < k \le n.$$

5.2　ベータ分布

Be (α,β):　ベータ分布 (beta distribution).

$$f(x)=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,\mathrm{I}[0<x<1];\quad \alpha>0,\beta>0. \tag{5.2}$$

ただし $B(\alpha,\beta)=\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$ はベータ関数である。

特別な場合。

Be $(1,1)$ は、区間 $(0,1)$ 上の一様分布 Un $(0,1)$ である。

Be $(1/2,1/2)$ の分布関数は

$$F(x)=\frac{2}{\pi}\mathrm{Arcsin}(\sqrt{x}),\quad 0<x<1.$$

であり、逆正弦分布 (arcsine distribution) と呼ばれる。酔歩モデルで現れ、ゲームでの「つき」を説明する。

$$X\sim \mathsf{Be}(\alpha,\beta)\ \Leftrightarrow\ 1-X\sim \mathsf{Be}(\beta,\alpha).$$

$$F(x;\alpha,\beta):=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\int_0^x u^{\alpha-1}(1-u)^{\beta-1}du,$$
$$F(1-x;\alpha,\beta)=F(x;\beta,\alpha),$$
$$F(x;\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}+F(x;\alpha+1,\beta-1),$$
$$F(x;\alpha,k+1)=\sum_{j=0}^{k}\binom{\alpha+k}{j}x^{\alpha+k-j}(1-x)^{j}.$$

$$E(X^r(1-X)^s)=\frac{B(\alpha+r,\beta+s)}{B(\alpha,\beta)}=\frac{\alpha^{\overline{r}}\beta^{\overline{s}}}{(\alpha+\beta)^{\overline{r+s}}}.$$
$$E(X)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta},\qquad Var(X)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)},$$
$$\text{“mode”}=\frac{\alpha-1}{\alpha+\beta-2},\ \alpha>1,\beta>1;\quad \text{“anti-mode”}=\frac{1-\alpha}{2-(\alpha+\beta)},\ \alpha<1,\beta<1.$$

$f(x)$ は $\beta<1<\alpha$ のときに単調増加、$\alpha<1<\beta$ のときに単調減少である。

$$X=\frac{Y}{1+Y}\sim \mathsf{Be}(\alpha,\beta)\ \Leftrightarrow\ Y=\frac{X}{1-X}\sim \mathsf{Be2}(\alpha,\beta;1)\ :\ \text{第 2 種ベータ分布}.$$

$Y_j\sim$ Ga $(\alpha_j,\xi), j=1,2,$ （ガンマ分布）が独立ならば、$Y_1/(Y_1+Y_2)\sim$ Be (α_1,α_2) であり、 Y_1+Y_2 と独立である。

$X_1\sim$ Be(a,b), $X_2\sim$ Be$(a+b,c)$ が独立ならば $X_1X_2\sim$ Be$(a,b+c)$ である。実際、独立なガンマ確率変数 $V_\omega\sim$ Ga(ω,ξ), $\omega=a,b,c,$ を用いると $X_1=V_\omega/(V_a+V_b)$, $X_2=(V_a+V_b)/(V_a+V_b+V_c)$ と表わせて、$X_1X_2=V_a/(V_a+V_b+V_c)\sim$ Be$(a,b+c)$.

$(Y_1,\ldots,Y_n)$ が独立ですべて一様分布 Un$(0,1)$ に従うとする。その順序統計量を $Y_{(1)}\le\cdots\le Y_{(n)}$ とすると $Y_{(k)}\sim$ Be$(k,n-k+1)$, $k=1,\ldots,n.$ より一般に $(Y_1,\ldots,Y_n)$ が独立で同一の連続な分布関数 F に従うとする。その順序統計量を $Y_{(1)}\le\cdots\le Y_{(n)}$ とすると、$F(Y_{(k)})\sim$ Be$(k,n-k+1)$, $k=1,\ldots,n.$

ガンマ分布への分布収束。

$X_n\sim$ Be $(\alpha,\beta_n)\Rightarrow\beta_nX_n\to X\sim$ Ga $(\alpha,1)(\beta_n\to\infty,n\to\infty)$.

6 $(0,\infty)$ 上の連続確率分布

6.1 指数分布

Ex (ξ):　指数分布 (exponential distribution).

Ex $(\xi) =$ Ga $(1,\xi)$ （ガンマ分布）

$$f(x) = \xi^{-1}\exp(-\xi^{-1}x)\mathrm{I}[0<x<\infty] = \exp(\theta t - b(\theta)), \tag{6.1}$$
$$\xi>0,\ \theta=-1/\xi,\ b(\theta)=-\log(-\theta),$$
$$F(x) = 1-\exp(-\xi^{-1}x), \quad F^{-1}(x) = -\xi\log(1-u), \quad 0<u<1,$$
$$\frac{f(x)}{1-F(x)} = \xi^{-1}\,\mathrm{I}[0<x<\infty],$$

$$P\{X>x+y|X>y\} = P\{X>x\}, \quad \forall x,y>0,$$
$$f(x+y)/(1-F(y)) = f(x), \quad \forall x,y>0,$$

この性質を、「$X\sim$ Ex (ξ) は記憶をもたない (memoriless)」という。

$$ch.f.(t) = (1-it\xi)^{-1}, \quad c.g.f.(t) = -\log(1-t\xi),$$
$$E(X^r) = \xi^r\Gamma(r+1), \quad r>-1,$$
$$E(X)=\xi, \quad Var(X)=\xi^2,$$
$$(d/d\theta)^r b(\theta) = (r-1)!(-\theta)^{-r}, \quad \kappa_r = \xi^r(r-1)!, \quad r=1,2,\ldots,$$

$X_j\sim$ Ex (ξ), $j=1,2,$ が独立のとき、$Y=X_1-X_2\sim$ BEx(ξ) (両側指数分布)。

$X\sim$ Ex (1) のとき、$\xi X^{1/\gamma}\sim$ Wb $(\gamma;\xi)$.（ワイブル分布）

U が $(0,1)$ 上の一様分布 Un $(0,1)$ に従うとき、$-\log(1-U)\sim$ Ex (1).

参照　N. Balakrishnan and A.P. Basu (eds.) (1995) *The Exponential Distribution–Theory, Methods and Applications,* Gordon and Breach, Amsterdam.

6.2 ガンマ分布

Ga (α,ξ): ガンマ分布 (gamma distribution).

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\xi^\alpha}x^{\alpha-1}\exp(-x/\xi)\,\mathrm{I}[0<x<\infty], \quad \xi>0,\ \alpha>0, \tag{6.2}$$

ただし $\Gamma(\alpha)$ はガンマ関数。

Ga $(1,\xi) =$ Ex (ξ) （指数分布）

$\alpha=k=1,2,\ldots,$ のとき、

$$1-F(x) = \sum_{y=0}^{k-1}\exp(-x/\xi)(x/\xi)^y/y!,$$

右辺は Po (x/ξ)（ポアソン分布）の下側確率である。

$$ch.f.(t) = (1-it\xi)^{-\alpha}, \quad c.g.f.(t) = -\alpha\log(1-t\xi),$$
$$E(X^r) = \xi^r\Gamma(\alpha+r)/\Gamma(\alpha), \quad r > -\alpha,$$
$$E(X) = \xi\alpha, \quad Var(X) = \xi^2\alpha, \quad C.V.(X) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$
$$\kappa_r = (r-1)!\alpha\xi^r, \quad r = 1, 2, \ldots$$

$X_j \sim$ Ga $(\alpha_j, \xi), j = 1, 2, \ldots,$ が独立ならば、$\sum_j X_j \sim$ Ga $(\sum_j \alpha_j, \xi)$.

X_1, X_2 が独立で $X_1 \sim$ Ga $(\alpha_1, \xi), X_1 + X_2 \sim$ Ga $(\alpha_1 + \alpha_2, \xi)$, ならば、$X_2 \sim$ Ga (α_2, ξ).

$X_j \sim$ Ga $(\alpha_j, \xi), j = 1, 2,$ が独立ならば、$X_1/(X_1+X_2) \sim$ Be (α_1, α_2)（ベータ分布）であり、$X_1 + X_2$ と独立である.

$X_j \sim$ Ga $(\alpha_j, \xi), j = 1, 2,$ が独立ならば、$X_1/X_2 \sim$ Be2 $(\alpha_1, \alpha_2; 1)$.（第２種ベータ分布）

$Y \sim$ N $(0, 1)$ ならば $Y^2 \sim$ Ga $(1/2, 2)$.

$X \sim$ Ga$(\alpha, 1)$, $Y = \log X$ (指数ガンマ確率変数), ならば Y のモーメント母関数は $E(e^{tY}) = E(X^t) = \Gamma(\alpha+t)\Gamma(t)$.

$X_0 \sim$ Ga$(\alpha, 1)$, $\quad X_1 \sim$ Ga$(\alpha + 1/2, 1)$, $\alpha > 0$, が独立ならば $2(X_0X_1)^{1/2} \sim$ Ga$(2\alpha, 1)$

カイ二乗分布

ChSq $(k) =$ Ga $(k/2, 2)$: 自由度 k のカイ二乗分布 (chi-square distribution (or chi-squared distribution, χ^2 distribution) with k degrees of freedom).

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(k/2)}2^{-k/2}x^{k/2-1}\exp(-x/2)\,\mathrm{I}[0 < x < \infty], \quad k = 1, 2, \ldots \tag{6.3}$$
$$E(X) = k, \quad Var(X) = 2k.$$

$Y_j \sim$ N $(0, 1), j = 1, \ldots, k$ が独立ならば、$\sum_{j=1}^k Y_j^2 \sim$ ChSq $(k), k = 1, 2, \ldots$

$Y_j \sim$ N $(\mu, 1), j = 1, \ldots, k$ が独立ならば、$\sum_{j=1}^k (Y_j - \overline{Y})^2 \sim$ ChSq $(k-1), k = 2, 3, \ldots (\overline{Y} = k^{-1}\sum_{j=1}^k Y_j)$.

参照　H.O. Lancaster (1969) *The Chi-Squared Distribution,* Wiley, New York, N.Y.

逆数ガンマ分布

RcGa (α, ξ): 逆数ガンマ分布 (reciprocal gamma distribution).

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\xi^\alpha x^{-\alpha-1}\exp\left(-\frac{\xi}{x}\right)I[0 < x < \infty], \quad \xi > 0, \ \alpha > 0.$$

$$E(X^r) = \xi^r\Gamma(\alpha-r)/\Gamma(\alpha), \quad r < \alpha.$$
$$E(X) = \xi/(\alpha-1), \quad V(X) = \xi^2/(\alpha-1)^2(\alpha-2).$$

$Y \sim$ Ga$(\alpha, 1/\xi)$ のとき、$X = 1/Y \sim$ RcGa(α, ξ).

$\alpha = 1/2$ のとき

RcGa $(1/2, \xi)$ の特性関数は

$$\text{c.h.f.}(t) = \exp((1-i)\sqrt{2\xi t})$$

となる。これは指数 1/2 の強安定分布 (strongly stable distribution) であることを示す。$Z \sim$ N$(0, \sigma^2)$ (正規分布) のとき $X = 1/Z^2 \sim$ RcGa$(1/2, 1/2\sigma^2)$ である。

6.3 非心ガンマ分布

NcGa (α, ξ, λ) : 非心ガンマ分布 (noncentral gamma distribution)

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda)\lambda^j}{j!} \frac{1}{\Gamma(\alpha+j)\xi^{\alpha+j}} x^{\alpha+j-1} \exp(-x/\xi) I[0 < x < \infty];\ \alpha, \xi > 0, \lambda \geq 0. \tag{6.4}$$

$$ch.f.(t) = (1 - it\xi)^{-\alpha} \exp\left(\frac{it\xi\lambda}{1 - it\xi}\right), \quad c.g.f.(t) = -\alpha \log(1 - t\xi) + \frac{t\xi\lambda}{1 - t\xi}$$
$$E(X) = (\alpha + \lambda)\xi, \quad Var(X) = \left(\frac{\alpha}{2} + \lambda\right)\xi^2, \quad \kappa_r = \left(\frac{\alpha}{r} + \lambda\right)\xi^r, r = 1, 2, \ldots$$

$X_i \sim$ NcGa$(\alpha_i, \xi, \lambda_i)$, i=1,2 が独立であれば $X_1 + X_2 \sim$ NcGa$(\alpha_1 + \alpha_2, \xi, \lambda_1 + \lambda_2)$
$X \sim$ Ga$(\alpha{+}n, \xi)$ において、n が X と独立で $n \sim$ Po(λ) であれば $X \sim$ NcGa(α, ξ, λ). (($\mathsf{G_A}(\alpha{+}n, \xi))_{n=0}^{\infty}$ の Po(λ) による混合 (mixture)。)

非心カイ二乗分布

NcChSq $(k, \mu^2) =$ NcGa $(k/2, 2, \mu^2/2)$: 自由度 k, 非心度 μ^2 の非心カイ 2 乗分布 (noncentral chi-square distribution).

$Y \sim$ N(μ, σ^2) とすると $X = Y^2/\sigma^2 \sim$ NcChSq$(1, \mu^2)$.

Ga $(0, \xi), \forall\xi > 0$, を、確率 1 で 0 の値をとる退化分布とすると NcGa $(0, \xi, \lambda)$ は連続な分布と離散値 0 との混合分布である。NcChSq $(0, \mu^2) =$ NcGa $(0, 2, \mu^2/2)$ は自由度 0 の非心カイ 2 乗分布である。

K を Po (λ) に従う確率変数、$Y_i, i = 1, 2, \cdots$ を指数分布 Ex (ξ) に従う独立確率変数列とすると、$X = Y_1 + \cdots + Y_K \sim$ NcGa $(0, \xi, \lambda)$.

6.4 ワイブル分布

Wb (γ, ξ) : ワイブル分布 (Weibull distribution)

$$f(x) = \frac{\gamma}{\xi^\gamma} x^{\gamma-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\xi}\right)^\gamma\right) \mathrm{I}[0 < x < \infty], \quad \gamma, \xi > 0. \tag{6.5}$$

$$1 - F(x) = \exp(-(x/\xi)^\gamma), \quad x > 0,$$
$$h(x) = \frac{\gamma}{\xi^\gamma} x^{\gamma-1}, \quad x > 0.$$

$$E(X^r) = \xi^r \Gamma(\frac{r}{\gamma} + 1), \quad r > -\gamma,$$
$$E(X) = \frac{\xi}{\gamma}\Gamma(\frac{1}{\gamma}), \quad Var(X) = \xi^2(\Gamma(\frac{2}{\gamma} + 1) - \Gamma^2(\frac{1}{\gamma} + 1)),$$
$$\text{“mode”} = (1 - \frac{1}{\gamma})^{\frac{1}{\gamma}}\xi, \quad \gamma > 1.$$

Wb $(1, \xi) =$ Ex (ξ)：指数分布
$Y \sim$ Ex (1) ならば $\xi Y^{1/\gamma} \sim$ Wb (γ, ξ).
$X \sim$ Wb (γ, ξ) ならば $\eta X^{1/\beta} \sim$ Wb $(\beta\gamma, \eta\xi^{1/\beta})$.

逆数ワイブル、フレシェ分布

$X \sim \mathsf{Wb}(\alpha, 1)$ のとき逆数 $Y = 1/X$ の分布関数は

$$P\{Y \le y\} = \exp(-y^{-\alpha}), \quad y > 0, \alpha > 0,$$

である。$\alpha = 1/3$ と変えると、$Z = \eta + \zeta(Y-1)/\xi$ の分布関数は

$$P\{Z \le z\} = \exp\left\{-\left(1+\xi\left(\frac{z-\eta}{\zeta}\right)\right)^{-1/\xi}\right\}, \quad z > \eta - \zeta/\xi, \tag{6.6}$$

負のワイブル

$X \sim \mathsf{Wb}(\alpha, 1)$ のとき $Y = -X$ の分布関数は

$$P\{Y \le y\} = \exp(-(-y)^{\alpha}), \quad y < 0, \alpha > 0,$$

である。$\alpha = -1/\xi$ $(\xi < 0)$ と変えると、$Z = \eta - \zeta(Y+1)/\xi$ の分布関数は

$$P\{Z \le z\} = \exp\left\{-\left(1+\xi\left(\frac{z-\eta}{\zeta}\right)\right)^{-1/\xi}\right\}, \quad z < \eta - \zeta/\xi, \tag{6.7}$$

$(\zeta > 0, -\infty < \eta < \infty)$ となる。

一般極値分布

(6.6) と (6.7) は ξ の符号、分布範囲が異なるが同一の形状をしている。また $(1+\xi x)^{-1/\xi)} \to e^{-x}(\xi \to 0)$ であるから

$$\begin{cases} \exp\left\{-\left(1+\xi\left(\frac{z-\eta}{\zeta}\right)\right)^{-1/\xi}\right\}, & \xi \ne 0,\ 1+\xi\left(\frac{z-\eta}{\zeta}\right) > 0, \\ \exp\left\{-\exp\left(-\frac{z-\eta}{\zeta}\right)\right\}, & \xi = 0,\ -\infty < z < \infty, \end{cases}$$

とまとめることができる。最後の式はグンベル分布の分布関数である。まとめた分布関数を一般極値分布 (genetalized extreme value distribution) と呼ぶ。独立同一分布に従う確率変数列の n 項までの最大値の漸近分布である。

6.5 第２種ベータ分布

$\mathsf{Be2}$ $(\alpha, \beta; \xi)$: 第２種ベータ分布 (beta distribution of the second kind)

$$f(x) = \frac{1}{B(\alpha,\beta)}\frac{1}{\xi^{\alpha}}\frac{x^{\alpha-1}}{(1+x/\xi)^{\alpha+\beta}}\,\mathrm{I}[0 < x < \infty], \quad \alpha, \beta, \xi > 0. \tag{6.8}$$

ただし $B(\alpha,\beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)/\Gamma(\alpha+\beta)$ はベータ関数である。

$$E(X^r) = \frac{\xi^r B(\alpha+r, \beta-r)}{B(\alpha,\beta)} = \frac{\xi^r \alpha^{\overline{r}}}{(\beta-1)^{\underline{r}}},\ r < \beta,$$

$$E(X) = \frac{\xi\alpha}{\beta-1},\ 1 < \beta, \qquad Var(X) = \frac{\xi^2\alpha(\alpha+\beta-1)}{(\beta-1)^2(\beta-2)},\ 2 < \beta,$$

$$\text{“mode”} = \frac{\xi(\alpha-1)}{\beta+1},\ \alpha > 1.$$

$$X \sim \mathsf{Be2}(\alpha,\beta;1) \ \Leftrightarrow \ 1/X \sim \mathsf{Be2}(\beta,\alpha;1).$$

$$X = \frac{Y}{1-Y} \sim \mathsf{Be2}(\alpha,\beta;1) \ \Leftrightarrow \ Y = \frac{X}{1+X} \sim \mathsf{Be}(\alpha,\beta) \text{ ベータ分布}.$$

$Y_j \sim$ Ga $(\alpha_j,\xi), j=1,2,$ （ガンマ分布）が独立ならば、$Y_1/Y_2 \sim$ Be2 $(\alpha_1,\alpha_2;1)$.

フィッシャー分布

Fs

$(k_1,k_2) =$ Be2 $(k_1/2, k_2/2; k_2/k_1)$: 自由度 k_1,k_2 のフィッシャー分布 (Fisher distribution with k_1,k_2 degrees of freedom). 別名。 F 分布、スネデカー分布。

$Y_j \sim$ ChSq $(k_j), j=1,2$ が独立ならば、$(Y_1/k_1)/(Y_2/k_2) \sim$ Fs (k_1,k_2).

パレート分布

$X \sim$Be2 $(1,\beta;\xi)$:

$$f(x) = \frac{\beta\xi^\beta}{(\xi+x)^{\beta+1}}\,\mathrm{I}[0<x<\infty], \quad 1-F(x) = \frac{1}{(1+x/\xi)^\beta}, \quad 0<x<\infty.$$

$\Rightarrow X+\xi \geq \xi \sim$ Prt (β,ξ).

6.6 対数正規分布

LgN (e^μ,σ^2): 対数正規分布 (lognormal distribution).

$$f(x) = \frac{1}{\sigma x}\phi\left(\frac{\log x-\mu}{\sigma}\right)\mathrm{I}[0<x<\infty] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\log((\frac{x}{e^\mu})^{1/\sigma})\right)^2\right)\mathrm{I}[0<x<\infty], \qquad (6.9)$$

$$-\infty<\mu<\infty,\ 0<\sigma<\infty, \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

$$\text{“median”} = e^\mu, \quad \text{“mode”} = \exp(\mu-\sigma^2),$$
$$E(X^t) = \exp(t\mu + t^2\sigma^2/2), \quad -\infty<t<\infty,$$
$$E(X) = e^\mu e^{\sigma^2/2}, \quad Var(X) = e^{2\mu}e^{\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1), \quad CV(X) = (e^{\sigma^2}-1)^{1/2}.$$

以下の事実も示すように、中央値 e^μ は尺度パラメータ、σ は「べき乗パラメータ」である。

$X = e^Y \sim$ LgN $(e^\mu,\sigma^2) \ \Leftrightarrow \ Y = \log X \sim$ N (μ,σ^2).

$Z \sim$ N $(0,1) \ \Rightarrow \ \exp(\mu+\sigma Z) = e^\mu(e^Z)^\sigma \sim$ LgN (e^μ,σ^2).

$X \sim$ LgN $(e^\mu,\sigma^2) \ \Rightarrow \ X^t \sim$ LgN $(e^{t\mu}, t^2\sigma^2),\ -\infty<t<\infty$.

参照

E.L. Crow and K. Shimizu (eds.)(1988) *Lognormal Distributions: Theory and Applications,* Marcel Dekker, New York.

6.7 逆正規型分布

InvN (μ,λ): 逆正規型分布 (inverse normal distribution).

別名 逆ガウス分布 (inverse gaussian distribution).

$$f(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} x^{-3/2} \exp\left(-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right) \mathrm{I}[0 < x < \infty], \quad \mu, \lambda > 0. \tag{6.10}$$

$c = \sqrt{\mu/\lambda}, \mu = 1$ とすると、

$$F(x) = \Phi(\frac{1}{c}\frac{x-1}{\sqrt{x}}) + e^{2/c^2}\Phi(-\frac{1}{c}\frac{x+1}{\sqrt{x}}), \quad 0 < x < \infty.$$

$$c.g.f.(t) = \frac{\lambda}{\mu}\left(1 - (1 - 2\mu^2 t/\lambda)^{1/2}\right), \quad t < \lambda/2\mu^2$$
$$E(X) = \mu, \quad Var(X) = \mu^3/\lambda, \quad C.V.(X) = \sqrt{\mu/\lambda},$$
$$\kappa_r = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2r-3)\mu^{2r-1}\lambda^{1-r}, \ r = 1, 2, \ldots$$

W_t を原点から出発する、拡散 (diffusion) 係数 σ^2、 移流 (drift) 係数 $\nu \neq 0$、のウィーナー過程とする。つまり時間 t の後の位置が $\mathsf{N}\ (\nu t, \sigma^2 t)$ に従う。W_t が初めて $a > 0$ に到着するまでの時間を T とすると、$\mu = a/\nu, \lambda = a^2/\sigma^2$ として、$T \sim \mathsf{InvN}\ (\mu, \lambda)$.

$X_k \sim \mathsf{InvN}\ (\mu_k, \lambda_k), k = 1, \ldots, n$ が独立ならば、$\sum_{k=1}^n \lambda_k X_k/\mu_k^2 \sim \mathsf{InvN}\ (\sum_k \lambda_k/\mu_k, (\sum_k \lambda_k/\mu_k)^2)$.

$X \sim \mathsf{InvN}\ (\mu, \lambda) \ \Rightarrow \ \lambda(X-\mu)^2/(\mu^2 X) \sim \mathsf{ChSq}\ (1)$. カイ 2 乗分布

参照

R.S. Chhikara and J.L. Folks (1989) *The Inverse Gaussian Distrubution,* Marcell Dekker, New York.

V. Seshadri (1993) *The Inverse Gaussian Distrubution: A Case Study in Exponential Families,* Oxford University Press, Oxford, U.K.

V. Seshadri (1999) *The Inverse Gaussian Distrubution: Statistical Theory and Applications,* Lecture Notes in Statistics, **137**, Springer, N.Y., NY.

7 $(-\infty, \infty)$ 上の連続確率分布

7.1 正規分布

$\mathsf{N}\ (\mu, \sigma^2)$: 正規分布 (normal distribution).

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \tag{7.1}$$
$$-\infty < x < \infty; \ -\infty < \mu < \infty, \ 0 < \sigma < \infty,$$
$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \tag{7.2}$$

$$ch.f.(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + i\mu t\right),$$
$$c.g.f.(t) = \mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2,$$
$$E(X) = \mu, \quad Var(X) = \sigma^2,$$
$$\mu_{2r} = \sigma^{2r}(2r-1)!!, \ r = 1, 2, \ldots,$$
$$\kappa_1 = \mu, \ \kappa_2 = \sigma^2, \ \kappa_r = 0, \ r = 3, 4, \ldots$$

$X_j \sim$ N $(\mu_j, \sigma_j^2), j = 1, 2, \ldots,$ が独立ならば、$\sum_j X_j \sim$ N $(\sum_j \mu_j, \sum_j \sigma_j^2)$.

$X_j \sim$ N $(0, 1), j = 1, \ldots, n$ が独立ならば、$\sum_{j=1}^n X_j^2 \sim$ Ga $(n/2, 2) =$ ChSq (n).（自由度 n のカイ二乗分布）

参照

柴田義貞 (1981) 正規分布、東京大学出版会。

J.K. Patel and C.B. Read (1996) *Handbook of The Normal Distribution,* 2nd ed., Marcel Dekker, New York.

7.2 ロジスティック分布

Lgst (μ, ξ) : ロジスティック分布 (logistic distribution).

$$f(x) = \frac{1}{\xi}\frac{\exp((x-\mu)/\xi)}{(1+\exp((x-\mu)/\xi))^2}, \ -\infty < x < \infty; \quad -\infty < \mu < \infty, \ 0 < \xi < \infty, \tag{7.3}$$

$$F(x) = 1 - \frac{1}{1+\exp((x-\mu)/\xi)} = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh(\frac{x-\mu}{2\xi})\right), \quad -\infty < x < \infty,$$

$$F^{-1}(u) = \mu + \xi \log \frac{u}{1-u}, \ 0 < u < 1.$$

$\mu = 0, \xi = 1$ であって u が確率のとき、F^{-1} はロジスティック関数（logistic function）あるいはロジット変換（logit transformation）と呼ばれている。

$$f(x) = \frac{1}{\xi}F(x)(1 - F(x)).$$

これから F が微分方程式 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\xi}y(1-y)$ の初期条件 $y(\mu) = \frac{1}{2}$ にたいする解となる。この微分方程式は上限 $y = 1$ があるときの成長のモデルであり、 F は成長曲線と呼ばれる曲線の一つの変形である。

$$ch.f.(t) = e^{i\mu t}\Gamma(1+i\xi t)\Gamma(1-i\xi t),$$

$$c.g.f.(t) = \mu t + \log\Gamma(1+\xi t) + \log\Gamma(1-\xi t),$$

$$E((X-\mu)^{2r}) = 2\xi^{2r}\Gamma(2r+1)(1-1/2^{2r-1})\zeta(2r), \ r > 0, \quad \zeta: \text{ Riemann's zeta function},$$

$$Var(X) = \mu_2 = \frac{\pi^2\xi^2}{3}, \quad \mu_4 = \frac{7\pi^4\xi^4}{15}.$$

$(X_1, \ldots, X_n)$ が独立で Lgst $(0, 1)$: にしたがうとき、 第 k 順序統計量 $X_{kn}(X_{1n} \leq \cdots \leq X_{nn})$ のモーメント母関数は、

$$m.g.f.(t) = \frac{\Gamma(k+t)}{(k-1)!}\frac{\Gamma(n-k+1-t)}{(n-k)!}.$$

$u \sim$ Un$(0, 1)$ (一様分布) のとき $\log(u/(1-u)) \sim$ Lgst$(0, 1)$.

参照

N. Balakrishnan (ed.) (1992) *Handbook of The Logistic Distribution,* Marcel Dekker, New York.

7.3 グンベル分布（二重指数分布）

Gb (η,ξ)： グンベル分布 (Gumbel distribution).

$$f(x)=\frac{1}{\xi}\exp\left(-\frac{x-\eta}{\xi}-\exp(-\frac{x-\eta}{\xi})\right),\quad -\infty<\eta<\infty, 0<\xi. \tag{7.4}$$

$$F(x)=\exp(-\exp(-(x-\eta)/\xi)),\quad F^{-1}(u)=\eta-\xi\log(-\log u),$$

$$ch.f.(t)=\exp(i\eta t)\Gamma(1-i\xi t),\quad c.g.f.(t)=\eta t+\log\Gamma(1-\xi t),$$

$$E(X)=\eta+\xi\gamma_E,\quad \gamma_E=0.57721\cdots: \text{オイラーの定数},$$

$$Var(X)=\xi^2\pi^2/6, \kappa_r=(-\xi)^r\psi^{(r-1)}(1), r=2,3,\ldots,\quad \psi^{(r)}(x): \text{ポリガンマ関数}.$$

$Y\sim$ Wb (γ,ξ) ならば $-\log Y\sim$ Gb $(-\log\xi,\gamma^{-1})$.

$X_k\sim$ Gb $(\eta,\xi), k=1,\ldots,n,$ が独立ならば、$\max(X_1,\ldots,X_n)\sim$ Gb $(\eta+\xi\log n,\xi)$.

$\exp(X)$ が指数分布 Ex (ξ) に従うとき、X の確率分布を「指数指数分布」と呼ぶことにする。その分布関数は $P\{X\le x\}=1-\exp(-\exp(x)/\xi)$ であるから、$-X\sim$ Gb $(-\log\xi,1)$.

7.4 スチューデント分布

St (k) : 自由度 k のスチューデントの t 分布 (Student's t-distribution).

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{k}B(1/2,k/2)}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}},\quad -\infty<x<\infty,\quad 0<k. \tag{7.5}$$

$$E(X)=0, 1<k,\quad Var(X)=k/(k-2), 2<k,$$

$$E(X^r)=\begin{cases}0, & r\quad \text{odd},\\ \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(r-1)}{(k-2)(k-4)\cdots(k-r)}k^{r/2}, & r\quad \text{even}, r<k.\end{cases}$$

$Z\sim$ N $(0,\sigma^2), V/\sigma^2\sim$ ChSq (k) が独立ならば、$X=Z/\sqrt{V/k}\sim$ St (k).

$Z_k\sim$ N $(\mu,\sigma^2), k=1,\ldots,n$ が独立ならば、$\overline{Z}=n^{-1}\sum_{k=1}^n Z_k, V=\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^n(Z_k-\overline{Z})^2$, として、$X=\sqrt{n}(\overline{Z}-\mu)/\sqrt{V}\sim$ St $(n-1)$.

$X\sim$ St $(k)\Rightarrow X^2\sim$ Fs $(1,k)=$Be2 $(1/2,k/2;k)$, したがって $1-1/(1+X^2/k)\sim$ distBe$(1/2,k/2)$.

St $(1)=$ Cau $(0,1)$.

$X_k\sim$ St $(k)\to X\sim$ N $(0,1), (k\to\infty)$.

7.5 コーシー分布

Cau (η,ξ)： コーシー分布 (Cauchy distribution).

$$f(x)=\frac{1}{\pi\xi}\frac{1}{1+((x-\eta)/\xi)^2}, -\infty<x<\infty,\quad -\infty<\eta<\infty, 0<\xi. \tag{7.6}$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^x f(y)dy=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\mathrm{Tan}^{-1}\left(\frac{x-\eta}{\xi}\right),$$

$$\int_{\eta-a}^{\eta+a}|y-\eta|f(y)dy=\frac{\xi}{\pi}\log(1+(\frac{x}{\xi})^2)\Big|_0^a\to\infty,\quad (a\to\infty),$$

$$\lim_{a\to\infty}\int_{\eta-a}^{\eta+a}(y-\eta)f(y)dy=0,\quad (\text{コーシー広義積分}).$$

$$ch.f.(t) = \exp(i\eta t - \xi|t|),$$
$$\text{“median”} = \text{“mode”} = \eta.$$

Cau $(0,1) =$ St(1) スチューデント分布.

$X \sim$ Cau $(0,1)$ であれば $X^2 \sim$ Be2 $(1/2, 1/2; 1)$ 第 2 種ベータ分布　あるいは Fs $(1,1)$ フィッシャー分布.

$X_j \sim$ Cau $(\eta_j, \xi_j), k = 1, 2, \ldots$ が独立ならば、$\sum_j X_j \sim$ Cau $(\sum_j \eta_j, \sum_j \xi_j)$.

$X \sim$ Cau $(\eta, \xi) \Rightarrow X^{-1} \sim$ Cau $(\eta/(\eta^2+\xi^2), \xi/(\eta^2+\xi^2))$.

$Y_j \sim$ N $(0, \sigma^2), j = 1, 2$ が独立ならば、$Y_1/Y_2 \sim$ Cau $(0,1)$.

$Y \sim$ Un $(0,1) \Leftrightarrow X = \tan(\pi Y/2) \sim$ Cau $(0,1)$.

7.6　両側指数分布

BEx (ξ) 両側指数分布 (bilateral exponential distribution)

別名　ラプラス分布 (Laplace distribution) とも呼ばれている。 二重指数分布 (double exponential distribution) の名はグンベル分布と紛らわしい。

$$f(x) = (2\xi)^{-1}\exp(-\xi^{-1}|x|), \quad \xi > 0,$$
$$F(x) = \begin{cases} 2^{-1}\exp(\xi^{-1}x), & x \le 0, \\ 1 - 2^{-1}\exp(-\xi^{-1}x), & x > 0. \end{cases}$$
$$E(X^{2r}) = (2r)!\xi^{2r}, \quad r \ge 0.$$

$X_j \sim$ Ex(ξ), $j = 1, 2$ (指数分布) が独立のとき、$Y = X_1 - X_2 \sim$ BEx(ξ).

$X \sim$ N$(0, t\sigma^2)$ の t が X と独立な確率変数で $t \sim$ Ex(ξ) (指数分布) ならば $X \sim$ BEx$(\sqrt{\xi/2}\sigma)$.

注意

$$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}\exp(-(ax+bx^{-1}))dx = \sqrt{\pi/a}\exp(-2\sqrt{ab}), \quad a > 0,\ b > 0.$$

参照　S. Kotz, T. J. Kozubowski, and K. Podgórski (2001) *The Laplace Distribution and Generalizations : A Revisit with Applications to Communications, Economics, Engineering, and Finance*, Birkhaiiser, Boston, MA, ISBN 0–8176–4166–1.

8　$(1, \infty)$ 上の連続確率分布

8.1　パレート分布

Prt $(\gamma, 1)$: パレート分布 (Pareto distribution) の標準形

$$f(x) = \frac{\gamma}{x^{r+1}}\mathrm{I}[1 < x < \infty], \quad \gamma > 0.$$
$$F(x) = 1 - x^{-r}, \quad 1 < x < \infty, \quad \frac{f(x)}{1 - F(x)} = \frac{\gamma}{x}\mathrm{I}[1 < x < \infty]$$
$$E(X^r) = \gamma/(\gamma - r), \quad r < \gamma, \quad Var(X) = \gamma/(\gamma-2)(\gamma-1)^2, \quad \gamma > 2.$$
$$X \sim \text{Prt}\ (\gamma, 1) \quad \Leftrightarrow \quad X^s \sim \text{Prt}\ (\gamma/s, 1), \quad s > 0$$
$$X = Y + 1 \sim \text{Prt}\ (\gamma, 1) \quad \Leftrightarrow \quad Y = X - 1 \sim \text{Be2}\ (1, \gamma; 1) \quad \text{第 2 種ベータ分布.}$$

$Z \sim$ Un $(0,1)$: 区間 $(0,1)$ 上の一様分布ならば $Z^{-1/\gamma} \sim$ Prt $(\gamma, 1)$, $\gamma > 0$.
Prt (γ, ξ) : 通常のパレート分布

$$f(x) = \frac{\gamma \xi^r}{x^{r+1}} \mathrm{I}[\xi < x < \infty], \quad r > 0, \quad \xi > 0,$$
$$F(x) = 1 - (\xi/x)^r, \quad 1 < x < \infty.$$
$$Y \sim \text{Prt } (\gamma, 1) \text{ ならば } X = \xi Y \text{ および } X|(X > \xi) \text{ が Prt } (\gamma, \xi) \text{ である.}$$
$$X = Y + \xi \sim \text{Prt } (\gamma, \xi) \quad \Leftrightarrow \quad Y = X - \xi \sim \text{Be2 } (1, \gamma; \xi) \quad \text{第 2 種ベータ分布.}$$

ローレンツ曲線 (Lorenz curve)

一般に $(0, \infty)$ 上の分布の分布関数 $F(x)$, 確率密度関数 $f(x)$ にたいして、不完全モーメント

$$\int_0^x t f(t)\, dt \Big/ \int_0^\infty t f(t)\, dt$$

を $F(x) = u$ の関数として表した

$$L(u) = \int_0^u F^{-1}(y)\, dy \Big/ \int_0^1 F^{-1}(y)\, dy, \quad 0 < u < 1,$$

をローレンツ曲線と呼ぶ。Prt (γ, ξ) のとき

$$L(u) = 1 - (1-u)^{1-1/\gamma}, \quad 0 < u < 1,$$

となる。γ が小さいほど分布が不平等であるとみなす。

一般パレート分布

$X \sim$ Prt $(1/\gamma, 1)$ ならば、$P\{X/(1-X) > y\} = (1-y)^{1/\gamma} \sim$ Be $(1, 1/\gamma)$ である。これもあわせ、パレート分布の位置と尺度を変えて次のように表わしたものが、一般パレート分布 (generalized Pareto distribution) と呼ばれている。極値統計理論で重要である。

$$1 - F(x) = \begin{cases} (1 + \frac{\gamma}{\xi}(x - \eta))^{-1/\gamma}, \quad \xi + \gamma(x - \eta) > 0, & \gamma \neq 0, \\ \exp(-\frac{1}{\xi}(x - \eta)), -\infty < x < \infty, & \gamma = 0. \end{cases}$$

参照　B.C. Arnold (1983) *Pareto Distributions,* International Co-operative Publishing House, Fairland, Md.

索 引